

Conf. dr. ANTOANETA ENE

FIZICĂ

2005

Tehnoredactare computerizată: ANTOANETA ENE

Grafica: ANTOANETA ENE

Control științific: Conf. dr. ALEXANDRINA NAT

Prefață

Prezenta lucrare este un curs de fizică generală destinat studenților de la specializarea „Inginerie economică industrială”, învățământ superior tehnic cu frecvență redusă.

Scopul lucrării este de a prezenta un ciclu de lecții care să permită atât însușirea, de către studenții începători în studiul ingineriei, a noțiunilor de bază ale fizicii ca știință a naturii cât și formarea unor specialiști cu o gândire sistematică.

Din materialul bibliografic am selectat și dezvoltat acele capitole care au strânsă legătură cu obiectele de specialitate, ținând cont și de poziția disciplinei fizică în planul de învățământ - anul I.

Capitolele în care este structurat cursul – Mecanică fizică, Oscilații și unde elastice, Electricitate și magnetism – nu constituie unități închise, fiind legate unele de altele prin exemple care se referă la fenomene ce urmează a fi prezentate sau prin referiri la legi și noțiuni discutate anterior. La sfârșitul fiecărui capitol au fost incluse probleme propuse pentru rezolvare fiind indicat răspunsul.

Dezvoltarea cursului se face din aproape în aproape, într-o succesiune firească. Nivelul matematic este accesibil, redus la strictul necesar, în centrul atenției aflându-se explicația sensului fizic al fenomenelor. Pentru a veni în sprijinul studenților, am expus în Anexa A1 a cursului principalele noțiuni de analiză matematică, aceste elemente fiind indispensabile în prezentarea elevată a unor legi fizice.

Conf. dr. Antoaneta Ene

CUPRINS

CAPITOLUL 1. MECANICĂ FIZICĂ	1
1.1. MECANICĂ CLASICĂ A PUNCTULUI MATERIAL	1
1.1.1. Cinematica punctului material	1
1.1.2. Dinamica clasică a punctului material	3
1.1.2.1. Legile fundamentale ale mecanicii clasice a punctului material	3
1.1.2.3. Teoremele generale ale dinamicii punctului material	4
1.2. ELEMENTE DE DINAMICĂ RELATIVISTĂ	9
1.2.1. Relația dintre masă și energie în dinamica relativistă	9
1.2.2. Relația dintre impuls și energie în dinamica relativistă	11
PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 1	11
CAPITOLUL 2. OSCILAȚII ȘI UNDE ELASTICE	13
2.1. OSCILAȚII ELASTICE	13
2.1.1. Mișcarea oscilatorie armonică	13
2.1.2. Mișcarea oscilatorie amortizată	15
2.1.3. Mișcarea oscilatorie întreținută (forțată). Rezonanța	17
2.1.4. Compunerea oscilațiilor armonice	20
2.1.4.1. Compunerea oscilațiilor armonice paralele cu pulsații egale	20
2.1.4.2. Compunerea a două oscilații paralele cu pulsații puțin diferite. Fenomenul de bătăi	21
2.1.4.3. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare cu pulsații egale	22
2.1.4.4. Compunerea oscilațiilor perpendiculare de pulsații oarecare	24
2.2. UNDE ELASTICE	26
2.2.1. Generalități	26
2.2.2. Ecuația undei plane monocromatice	27
2.2.3. Propagarea undelor longitudinale în solide	29
2.2.4. Propagarea undelor longitudinale în fluide	31
2.2.5. Propagarea undelor transversale în solide	33
2.2.6. Ecuația coardei vibrante	35
2.2.7. Ecuația undelor într-un mediu ideal	36
2.2.7.1. Ecuația diferențială a undelor	36
2.2.7.2. Unda plană	37
2.2.7.3. Unda sferică	40
2.2.8. Interferența undelor elastice. Unde staționare	42
2.2.9. Mărimi energetice	44
2.2.10. Ultraacustică	45
PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 2	47
CAPITOLUL 3. ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM	49
3.1. ELECTROSTATICĂ	49
3.1.1. Sarcina electrică	49
3.1.2. Câmpul electric. Intensitatea câmpului electric în vid	50
3.1.3. Fluxul electric. Legea lui Gauss în vid	51
3.1.4. Câmpul electric al unor distribuții de sarcină	55
3.1.5. Potențialul electric	56
3.1.6. Dipolul electric	59
3.1.6.1. Câmpul și potențialul electric creat de un dipol	60
3.1.6.2. Dipolul electric în câmp electrostatic	60
3.1.6.3. Energia dipolului în câmp electrostatic	62
3.1.7. Conductori în câmp electric	62
3.1.8. Dielectrici în câmp electric. Polarizarea dielectricilor	63
3.1.8.1. Tipuri de dielectrici și de polarizare	63
3.1.8.2. Vectorul polarizare electrică	64
3.1.9. Capacitatea electrică. Condensatori	66
3.1.10. Definirea vectorului inducție electrică	67
3.1.10.1. Legătura dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ și $\vec{P}$	67
3.1.10.2. Legea lui Gauss generalizată	68
3.1.11. Energia câmpului electrostatic	69
3.2. ELECTRODINAMICĂ	70
3.2.1. Curentul electric. Intensitatea curentului electric. Ecuația de continuitate	71
3.2.2. Legea lui Ohm	73
3.2.3. Tensiunea electromotoare	74
3.2.4. Legea lui Joule	75
3.3. MAGNETOSTATICĂ	76
3.3.1. Câmpul magnetic constant. Inducția magnetică	76
3.3.2. Legea Biot-Savart-Laplace	77
3.3.3. Momentul dipolar magnetic	80
3.3.4. Interacțiuni electromagnetice	80
3.3.4.1. Forța electromagnetică (Laplace)	80
3.3.4.2. Forța electrodinamică	81
3.3.4.3. Forța Lorentz	82
3.3.5. Legea circuitului magnetic (legea lui Ampère)	82
3.3.6. Fluxul inducției magnetice	84
3.3.7. Câmpul magnetic în interiorul substanțelor magnetizate. Vectorul magnetizație $\vec{M}$	
Legătura dintre vectorii $\vec{B}$, $\vec{H}$ și $\vec{M}$	85
3.4. CÂMPURI ELECTRICE ȘI MAGNETICE VARIABLE	86
3.4.1. Inducția electromagnetică	86
3.4.2. Energia câmpului magnetic	87
3.4.3. Curentul de deplasare	89
3.4.4. Câmp electrodinamic	90
3.4.5. Câmp electromagnetic. Ecuațiile lui Maxwell	91
3.4.6. Conservarea energiei câmpului electromagnetic	93
3.4.7. Unde electromagnetice	94
PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 3	97
ANEXA A 1. ELEMENTE DE ANALIZĂ VECTORIALĂ	99
A.1.1. Diferențiale totale exacte	99
A.1.2. Operatori vectoriali diferențiali de ordinul întâi în coordonate carteziene	99
A.1.3. Formule utile	100

CAPITOLUL 1

MECANICĂ FIZICĂ

Mecanica fizică este ramura fizicii care studiază mișcarea corpurilor, cauzele care produc mișcarea și stabilește condițiile de repaus ale corpurilor. În funcție de valoarea vitezei de deplasare a corpurilor, mecanica se clasifică în *mecanică clasică* și *mecanică relativistă*. Mecanica clasică studiază deplasările corpurilor având viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid, în timp ce mecanica relativistă studiază deplasările acelor corpuri care au viteze apropiate de viteza luminii în vid.

1.1. MECANICA CLASICĂ A PUNCTULUI MATERIAL

1.1.1. Cinematica punctului material

Cinematica studiază mișcarea mecanică a corpurilor fără a lua în considerație cauzele care determină această mișcare.

Un corp se află în mișcare atunci când își modifică poziția față de alte corpuri considerate fixe și este în repaus când nu-și schimbă poziția față de acestea. Un corp oarecare, considerat fix, față de care se raportează mișcarea altor corpuri, determină un sistem de referință care este un sistem de coordonate tridimensional legat rigid de corpul fix. Deoarece în realitate nu există corpuri absolut fixe, nu există sisteme de referință absolut fixe și deci mișcările sunt *relative*.

Poziția la un moment dat a unui corp este determinată de *vectorul de poziție* $\vec{r}$ care este vectorul ce unește originea sistemului de coordonate, O, cu punctul P în care se găsește corpul (fig. 1.1.1).

Pentru studiul mișcării corpurilor se folosește *modelul punctului material*. Vom numi *punct material* un ansamblu ale cărui dimensiuni pot fi neglijate în raport cu distanța parcursă. Mișcarea unui punct material este caracterizată prin *trajectorie* și prin *legea de mișcare*. *Trajectoria* reprezintă locul geometric al tuturor punctelor prin care trece mobilul în timpul deplasării. *Legea de mișcare* reprezintă legea de variație a vectorului de poziție a unui punct material în funcție de timp în raport cu un punct considerat fix.

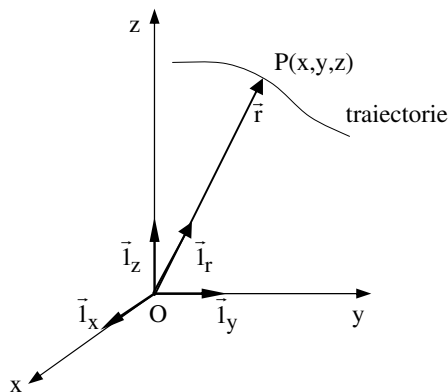


Fig. 1.1.1

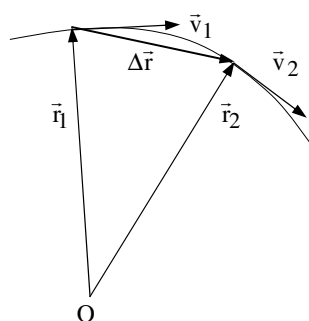


Fig. 1.1.2

Mișcarea este deci determinată când se cunoaște funcția :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.1.1)$$

care reprezintă *ecuația de mișcare* a punctului material.

Vectorul de poziție se scrie în funcție de coordonatele sale sub forma:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{I}_x + y \cdot \vec{I}_y + z \cdot \vec{I}_z \quad (1.1.2)$$

$\vec{I}_x$, $\vec{I}_y$ și $\vec{I}_z$ fiind versorii (vectorii unitate) axelor Ox, Oy și Oz ale sistemului de referință ales. Mișcarea este cunoscută dacă știm cum se modifică în timp coordonatele punctului material, deci cunoscând funcțiile :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Funcția vectorială $\vec{r}(t)$ trebuie să satisfacă anumite restricții impuse de fenomenul fizic al mișcării punctului. Astfel ea trebuie să fie *continuu* și *uniformă* (deoarece în conformitate cu principiul perfecte localizări, punctul material nu poate ocupa simultan mai multe poziții distincte în spațiu), *finită în modul* și *derivabilă*. Ecuațiile (1.1.3) pot fi considerate ca fiind *ecuațiile parametrice* ale traiectoriei, parametrul fiind timpul, sau *ecuațiile cinematice* ale mișcării. *Ecuația traiectoriei* se află eliminând timpul din ecuațiile parametrice.

Schimbarea poziției unui mobil în timpul mișcării este determinată de vectorul *deplasare*, $\Delta \vec{r}$ (fig. 1.1.2) care se exprimă sub forma:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.1.4)$$

corespunzător intervalului de timp $\Delta t = t_2 - t_1$.

Dacă intervalul de timp este foarte mic, vectorul deplasare se confundă cu spațiul parcurs de mobil. Se definește *viteza* punctului material ca fiind:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (1.1.5)$$

care, așa cum se observă din figura 1.1.2, este *tangentă* la traiectoria mobilului.

Ținând cont de (1.1.2), relația (1.1.5) devine :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{I}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{I}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{I}_z = \dot{x} \vec{I}_x + \dot{y} \vec{I}_y + \dot{z} \vec{I}_z \quad (1.1.6)$$

sau :

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{I}_x + v_y \cdot \vec{I}_y + v_z \cdot \vec{I}_z \quad (1.1.6')$$

unde v_x , v_y și v_z sunt componentele vectorului $\vec{v}$ de-a lungul axelor de coordonate.

Viteza medie este:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

și are *direcția secantei* la traiectorie (direcția vectorului deplasare $\Delta \vec{r}$).

Modulul vectorului viteză se calculează cu relația :

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.1.7)$$

Dacă $s(t)$ reprezintă dependența de timp a distanței parcurse de mobil pe traiectorie, atunci modulul vitezei se determină din relația:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Dacă $\vec{I}_r$ este versorul razei vectoriale $\vec{r}$ (fig. 1.1.1), relația (1.1.5) se mai poate scrie sub forma :

$$\vec{v} = \frac{d(r \cdot \vec{I}_r)}{dt} = r \frac{d\vec{I}_r}{dt} + \vec{I}_r \frac{dr}{dt} \quad (1.1.8)$$

în care r este *modulul* vectorului de poziție. Din relația (1.1.8) se observă că la viteza $\vec{v}$ contribuie doi termeni: o variație a direcției razei vectoriale, reprezentată de $r \cdot \frac{d\vec{l}_r}{dt}$ și o variație a modulului vectorului de poziție, $\frac{dr}{dt} \cdot \vec{l}_r$.

Dacă vectorul viteză a punctului material variază în timp se definește vectorul *acclerație* ca fiind :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (1.1.9)$$

sau, ținând cont de (1.1.5) :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (1.1.10)$$

Ultimele două relații se scriu în funcție de componentele vectorilor $\vec{v}$ și $\vec{r}$ astfel:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{l}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{l}_y + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{l}_z = \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \vec{l}_x + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \vec{l}_y + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \vec{l}_z = \ddot{x} \cdot \vec{l}_x + \ddot{y} \cdot \vec{l}_y + \ddot{z} \cdot \vec{l}_z$$

sau:

$$\vec{a} = a_x \vec{l}_x + a_y \vec{l}_y + a_z \vec{l}_z \quad (1.1.10')$$

unde a_x, a_y, a_z sunt componentele accelerației în lungul celor trei axe de coordonate.

Modulul accelerației este :

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.1.11)$$

1.1.2. Dinamica clasică a punctului material

Dinamica studiază mișcarea mecanică a corpurilor ținând cont atât de forțele care produc mișcarea cât și de masele corpurilor în mișcare.

1.1.2.1. Legile fundamentale ale mecanicii clasice a punctului material

Aceste legi au fost formulate de Newton și sunt rezultatul unui număr mare de experiențe și din această cauză, adesea sunt enunțate ca **principii** :

1. LEGEA INERȚIEI se enunță astfel: "*un punct material asupra căruia nu acționează nici o forță, rămâne în repaus sau se deplasează rectiliniu și uniform*". Deci,

$$\vec{a} = 0 \text{ dacă } \vec{F} = 0.$$

Introducând noțiunea de *impuls* :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.1.12)$$

unde m este masa particulei (punctului material), considerată *constantă* în cazul clasic, atunci din condiția $\vec{a} = 0$ rezultă $\vec{v} = \text{const.}$ și **legea inerției** poate fi enunțată și în felul următor : "*În absența forțelor exterioare impulsul unui punct material rămâne constant*". Această formulare pune în evidență faptul că legea inerției este o **lege de conservare a impulsului**.

2. LEGEA VARIAȚIEI IMPULSULUI sau **LEGEA FORȚEI** este **principiul fundamental** care definește forța ca fiind proporțională cu viteza de variație a impulsului: "*derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu forța care produce mișcarea*" :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad (1.1.13)$$

Cum $m = \text{const.}$ rezultă :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (1.1.14)$$

sau, ținând cont de expresia (1.1.10) a accelerației,

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.1.15)$$

care pe componente se scrie :

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases} \quad (1.1.16)$$

relații numite *ecuațiile diferențiale ale mișcării*.

Prin integrarea succesivă a relațiilor (1.1.16) se obțin pe rând, componentele vitezei și ecuațiile parametrice ale traiectoriei $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ care depind astfel de două constante de integrare, sau, mai general, legea de mișcare a punctului material $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Pentru a putea determina starea mecanică a acestuia (poziția și viteza sa) la un moment dat este necesară cunoașterea constantelor de integrare și acest lucru se poate face dacă se dau așa numitele *condiții inițiale* adică poziția și viteza punctului material la un moment dat pe care-l alegem ca origine a timpului, $t=0$.

3. LEGEA ACȚIUNILOR RECIPROCE se enunță în felul următor: "*întotdeauna fiecărei acțiuni i se opune o reacțiune egală în modul și de sens contrar*" :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (1.1.17)$$

Acțiunea și reacțiunea se exercită ca perechi, acționează simultan asupra a două corpuri diferite și au direcția în lungul dreptei ce unește cele două corpuri.

4. LEGEA INDEPENDENȚEI ACȚIUNII FORȚELOR sau **LEGEA SUPERPOZIȚIEI FORȚELOR** afirmă că "*forțele la care este supus un punct material acționează independent unele de altele*".

Conform acestui principiu acțiunea simultană a mai multor forțe $\vec{F}_i$ ($i = \overline{1, n}$) asupra unui punct material poate fi înlocuită prin rezultanta lor $\vec{F}$ și, invers, o forță poate fi descompusă în componente și acțiunea lor este echivalentă cu acțiunea forței rezultante:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.1.18)$$

1.1.2.2. Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teoremele generale ale dinamicii punctului material sunt *consecințe* ale principiilor dinamicii și permit în multe cazuri determinarea ecuației de mișcare fără a mai fi necesară integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării (1.1.16). Pentru analizarea acestor teoreme considerăm un punct material de masă m , asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$.

1. TEOREMA IMPULSULUI: "*Derivata în raport cu timpul a impulsului punctului material este egală cu rezultanta forțelor aplicate*".

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.1.19)$$

Dacă forța care acționează asupra punctului material este nulă, **impulsul se conservă**:

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2)$$

2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Momentul cinetic al unui punct material în mișcare în raport cu un punct fix O este mărimea fizică vectorială :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.1.20)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material față de acel punct iar $\vec{p}$ impulsul acestuia (fig. 1.1.3).

În cazul în care punctul material este *legat* de punctul fix O și asupra lui acționează o forță $\vec{F}$, se definește momentul forței în raport cu punctul O ca fiind:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.1.21)$$

Derivând $\vec{L}$ în raport cu timpul se obține :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (1.1.22)$$

unde

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = 0$$

deoarece vectorii sunt coliniari.

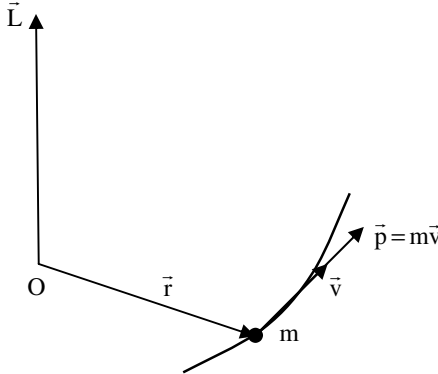


Fig. 1.1.3

Astfel se poate enunța **teorema variației momentului cinetic**: “*viteza de variație a momentului cinetic în raport cu un punct fix este egală cu momentul forței care produce mișcarea în raport cu acel punct*”.

Dacă punctul material este *izolat* ($\vec{F} = 0$) sau se află într-un **câmp central** (forța $\vec{F}$ ce acționează asupra lui este pe direcția razei vectoriale, suportul acesteia trecând printr-un punct fix numit *centrul câmpului*, ca de exemplu forța centripetă, forța elastică, greutatea corpurilor), momentul $\vec{M}$ este nul și **momentul cinetic se conservă** (rămâne constant în timp).

Deci se poate scrie teorema conservării momentului cinetic:

$$\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}(t_1) = \vec{L}(t_2)$$

3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

Prin definiție, *lucrul mecanic elementar* $d\mathcal{L}$ efectuat de o forță $\vec{F}$, când punctul de aplicație al acestei forțe se deplasează cu $d\vec{r}$, este egal cu produsul scalar dintre $\vec{F}$ și $d\vec{r}$:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}) \quad (1.1.23)$$

Dacă în relația de definiție (1.1.23) se înlocuiește expresia forței (1.1.13) rezultă:

$$d\mathcal{L} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})d\vec{r} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})\vec{v}dt = \vec{v}d(m\vec{v}) = m\vec{v}d\vec{v}$$

$$\text{sau: } d\mathcal{L} = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT \quad (1.1.24)$$

unde s-a notat :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.1.25)$$

mărimă care reprezintă *energia cinetică (de mișcare)*.

Dacă deplasarea sub acțiunea forței are loc între punctele A și B (fig.1.1.4), lucrul mecanic efectuat va fi :

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dT = T_B - T_A = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} \quad (1.1.26)$$

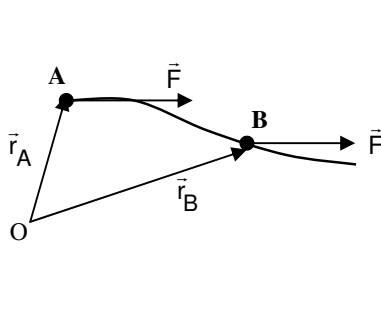


Fig. 1.1.4

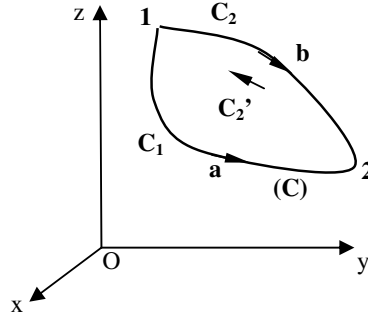


Fig. 1.1.5

Relația (1.1.26) reprezintă conținutul **teoremei variației energiei cinetice** care se enunță în felul următor: "*variația energiei cinetice a unui punct material de masă constantă acționat de o forță într-un interval de timp, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța care acționează asupra acestuia în intervalul de timp considerat*".

Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material este nulă, sau este perpendiculară pe direcția deplasării, din definiția (1.1.23) a lui $\mathcal{L}$ rezultă că lucrul mecanic este nul și conform (1.1.26) *energia cinetică se conservă*.

Același lucru mecanic poate fi efectuat în diferite intervale de timp și de aceea în practică e important și timpul în care se realizează lucrul mecanic respectiv. Pentru caracterizarea mecanismelor și motoarelor se folosește noțiunea de *putere mecanică*, definită ca mărimea fizică numeric egală cu lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \quad (1.1.27)$$

sau, ținând cont de (1.1.23), pentru $\vec{F} = \text{const.}$ se obține:

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1.1.28)$$

deci la forțe egale puterea depinde de viteză.

4. TEOREMA CONSERVĂRII ENERGIEI MECANICE

S-a constatat că există forțe, cum sunt forțele câmpului gravitațional, elastic sau electrostatic, numite forțe *conservative*, pentru care lucrul mecanic nu depinde de forma drumului parcurs ci numai de pozițiile inițială și finală (fig. 1.1.5):

$$\mathcal{L} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} \quad (1.1.29)$$

Pentru conturul închis $C = 1a2b1$ se poate scrie, ținând cont de (1.1.29) :

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_2'} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad (1.1.30)$$

sau :

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0 \quad (1.1.31)$$

Relațiile (1.1.30) și (1.1.31) arată că lucrul mecanic al forțelor conservative efectuat pe o traiectorie închisă este nul și din punct de vedere matematic (relația A.1.23 din anexa A1) reprezintă condiția necesară și suficientă ca lucrul mecanic elementar $\vec{F} d\vec{r}$ (integrândul din 1.1.31) să fie o diferențială totală a unei funcții scalare $U(x,y,z)$ numită *potențialul forței* sau *energie potențială* care depinde de poziția punctului material, fără să depindă de timp:

$$\vec{F} d\vec{r} = - dU \quad (1.1.32)$$

unde semnul minus indică scăderea acestuia atunci când forța câmpului efectuează lucru mecanic.

Ultima relație se mai poate scrie, ținând cont de relația (A.1.7) din anexa A1 pentru o diferențială totală exactă:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

echivalentă cu următoarele egalități corespunzătoare componentelor forței :

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.1.33)$$

cu proprietatea (A.1.9):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (1.1.34)$$

Astfel, se poate defini vectorul forță:

$$\vec{F} = -\text{grad } U \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U \quad (1.1.35)$$

unde operatorul vectorial ∇ (nabla) definit în anexă (relația A.1.12),

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{I}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{I}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{I}_z,$$

aplicat unei funcții scalare, poartă numele de **gradient**.

Expresiile (1.1.34) conduc la relațiile:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \quad (1.1.36)$$

Definind **rotorul** vectorului $\vec{F}$ (relația A.1.17) ca produsul vectorial :

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1.1.37)$$

se observă că în stânga relațiilor (1.1.36) sunt chiar componentele vectorului $\text{rot } \vec{F}$. Rezultă astfel:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (1.1.38)$$

care reprezintă o altă caracterizare a forțelor conservative și totodată *condiția necesară și suficientă ca forța câmpului să derive dintr-un potențial*.

La acest rezultat se putea ajunge și folosind teorema lui Stokes (A.1.22) de transformare a integralei curbilini în integrală de suprafață, pe suprafața S delimitată de conturul (C) :

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) d\vec{S} = 0$$

de unde se obține $\nabla \times \vec{F} = 0$ și deoarece rotorul unui gradient este întotdeauna nul (relația A.1.31), rezultă definiția pentru o forță conservativă, ca gradientul cu semn schimbat al energiei potențiale : $\vec{F} = - \text{grad } U$.

Relația (1.1.32) se mai scrie:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} d\vec{r} = -dU \quad (1.1.39)$$

și lucrul mecanic efectuat între două puncte A și B va fi :

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B (-dU) = U_A - U_B \quad (1.1.40)$$

unde U_A și U_B sunt energiile potențiale corespunzătoare punctelor A respectiv B, care sunt determinate până la o constantă arbitrară. Deci **lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului între două puncte este egal cu variația energiei potențiale între punctele respective, luată cu semn schimbat.**

Alegând un punct de referință P_0 (spre exemplu la infinit, unde câmpul de forțe se anulează în general) se poate defini energia potențială a punctului material într-un punct $P(\vec{r})$ ca fiind lucrul mecanic al forțelor câmpului, cu semn schimbat, pentru deplasarea punctului material din punctul de referință P_0 în punctul considerat:

$$U(\vec{r}) = - \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{r} \quad (1.1.41)$$

Suprafețele pe care energia potențială este constantă ($U=\text{const.}$) se numesc *suprafețe echipotențiale* (descrise în §A.1.4.1). Forța câmpului conservativ, $\vec{F}$, este perpendiculară pe suprafețele echipotențiale și îndreptată în sensul descrescării energiei potențiale (fig. 1.1.6), conform definiției (1.1.35). Un punct material situat într-un câmp conservativ *evoluează către poziția caracterizată de un minim al energiei potențiale* (poziția de echilibru stabil) și această tendință are o valabilitate generală în sensul că este *tendința naturală a tuturor sistemelor* de a trece de la stări cu energie potențială mai mare către stări cu energie potențială mai mică, adică tind către o stare căreia îi corespunde o valoare minimă a energiei potențiale.

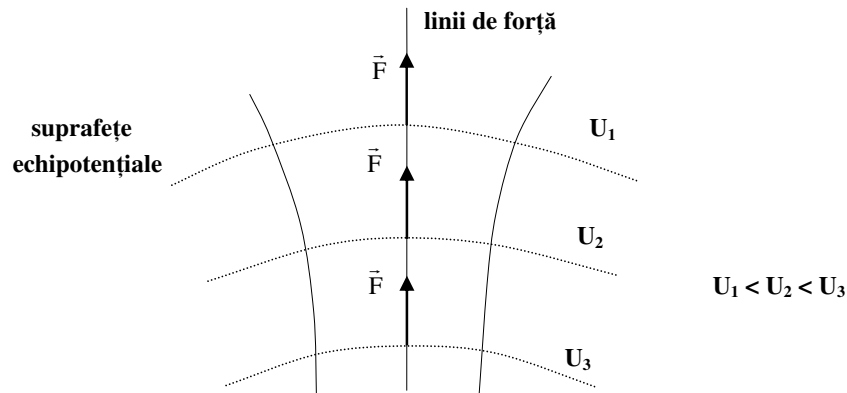


Fig. 1.1.6

Conform (1.1.24) și (1.1.39) s-a obținut că:

$$d\mathcal{L} = dT = -dU \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = 0 \Rightarrow T + U = \text{const.}$$

sau, notând suma dintre energia cinetică și cea potențială cu E (*energia mecanică*):

$$T_A + U_A = T_B + U_B = E = \text{const.} \quad (1.1.42)$$

care reprezintă **teorema conservării energiei mecanice**, evidențiind faptul că “*în timpul mișcării într-un câmp de forțe conservativ are loc o transformare reciprocă a energiei cinetice în energie potențială dar energia mecanică rămâne constantă*”.

Dacă punctul material este situat într-un câmp conservativ și este supus în același timp la o forță *neconservativă* (*disipativă*) $\vec{F}'$ (spre exemplu o forță de frecare), **lucrul mecanic al forței neconservative este egal cu variația energiei mecanice a corpului:**

$$\mathcal{L}_{necons} = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \Delta E \quad (1.1.43)$$

1.2. ELEMENTE DE DINAMICĂ RELATIVISTĂ

1.2.1. Relația dintre masă și energie în dinamica relativistă

Pentru viteze foarte mari ale corpurilor, apropiate de viteza luminii în vid (c), *masa de mișcare* (*masa relativistă*) nu mai este constantă, ca în cazul dinamicii clasice, ci crește cu viteza după legea (fig.1.2.1):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.2.1)$$

unde m_0 este masa de repaus, deci nu este doar funcție de proprietățile corpului (particulei) ci și de starea de mișcare a acestuia. Ea nu este o mărime invariantă, având valori diferite în referențiale diferite. Creșterea masei relativiste cu viteza a fost verificată experimental studiind sarcina specifică a electronilor pentru diferite viteze; s-a constatat că sarcina specifică e/m este mai mică pentru electronii rapizi decât pentru cei lenți. Variația masei de mișcare cu viteza a putut fi observată și în procesele de ciocnire dintre particulele elementare.

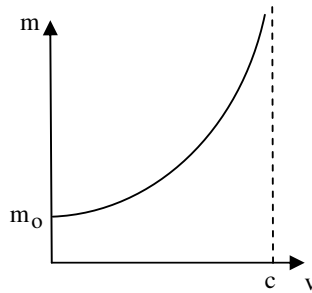


Fig. 1.2.1

Pornind de la relația de definiție a forței, care are aceeași formă (1.1.13) ca și în mecanica clasică,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m v)$$

se obține:

$$F dt = v dm + m dv$$

de unde, prin înmulțire cu v ($v = \frac{dr}{dt}$), se obține lucrul mecanic elementar al forței F :

$$d\mathcal{L} = F dr = v^2 dm + m v dv \quad (1.2.2)$$

Diferențiind relația (1.2.1) rezultă:

$$dm = m_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{1}{c^2} \right) 2v dv$$

de unde,

$$dm = \frac{m_0 v dv}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}} = \frac{m v dv}{c^2 - v^2}$$

sau

$$(c^2 - v^2) dm = m v dv$$

și (1.2.2) devine:

$$d\mathcal{L} = (c^2 - v^2) dm + v^2 dm = c^2 dm = dT$$

Integrând această relație se obține energia cinetică:

$$c^2 \int_{m_0}^m dm = \int_0^T dT \Rightarrow T = (m - m_0) c^2 \quad (1.2.3)$$

Se definește *energia relativistă (totală)* E a unei particule libere (în absența câmpurilor de forțe) ca produsul dintre masa de mișcare și pătratul vitezei luminii:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.2.4)$$

numită și *relația lui Einstein*, care arată că orice particulă care are masă are și energie. Această legătură dintre masă și energie mai este denumită și **legea echivalenței dintre masă și energie**. Această echivalență nu trebuie confundată cu noțiunea de *identitate*; masa și energia reprezintă caracteristici diferite ale particulelor. Legea echivalenței stabilește proporționalitatea dintre ele.

Energia de repaus (pentru $v = 0$), este diferită de zero în cazul relativist:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1.2.5)$$

relația (1.2.3) scriindu-se:

$$T = E - E_0 \quad (1.2.6)$$

Dacă viteza de deplasare a particulei este mult mai mică decât viteza luminii, se dezvoltă expresia

$\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}$ din relația (1.2.4) în serie de puteri și se păstrează primii doi termeni, rezultând:

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Al doilea termen din membrul drept coincide cu energia cinetică clasică a particulei (1.1.25).

1.2.2. Relația dintre impuls și energie în dinamica relativistă.

Legătura dintre masa de repaus m_0 și impulsul relativist $\vec{p}$ este dată de relația:

$$\vec{p} = m(v) \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.2.7)$$

Pentru viteze mici, $v \ll c$, această relație coincide cu cea clasică din mecanica newtoniană. S-ar părea că masa m_0 coincide cu masa particulei când aceasta se mișcă cu viteză mică. Proprietățile masei de repaus m_0 sunt însă *esențial* diferite de cele ale masei considerate în cadrul teoriei clasice. Masa de repaus nu satisface legea de conservare. Există procese în care masa totală a particulelor înainte de procesul fizic nu este egală cu masa totală a particulelor care rezultă după desfășurarea acestuia. Neconservarea masei de repaus rezultă și din faptul că masa de repaus m_0 nu este o proprietate generală a particulelor; spre exemplu, fotonii și neutrinii au masa de repaus nulă. Masa de repaus este o caracteristică foarte importantă a corpurilor. Fiecare particulă elementară sau fundamentală are o masă de repaus m_0 bine determinată.

În teoria relativității se admite legea conservării energiei și a impulsului și din relația lui Einstein rezultă că *se conservă și masa relativistă*. Spre deosebire de mecanica clasică, unde există două legi de conservare pentru energie și, respectiv, masă, în teoria relativității ele sunt reunite într-una singură și anume în **legea conservării energiei totale**.

Eliminând viteza particulei din relațiile (1.2.4) și (1.2.7) se obține *relația dintre impulsul și energia relativistă*:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.2.8)$$

PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 1

1.1. Un mobil se deplasează după ecuațiile parametrice $x = 4 + 6 t^2$ și $y = 3 t^2 - 1$, unde x și y se dau în cm, iar t în s. Să se determine traiectoria mobilului, mărimea vitezei și a accelerației.

$$\mathbf{R}: y = \frac{x}{2} - 3; \quad v = 6t \sqrt{5} \text{ cm/s}; \quad a = 6 \sqrt{5} \text{ cm/s}^2$$

1.2. Un mobil execută o mișcare rectilinie conform ecuației $x = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$. Să se determine în ce moment viteza mobilului este *maximă* și care este această valoare.

$$\mathbf{R}: [t]_{v=v_{\max}} = 1 \text{ s}; \quad v_{\max} = v(1) = 7 \text{ m/s}.$$

1.3. Să se determine viteza și spațiul parcurs de un mobil a cărui accelerație depinde de viteză după legea $a = -kv^2$, unde k este o constantă pozitivă, cunoscând că la $t=0$, $v=v_0$ și $x=0$. Care este dependența vitezei de spațiul parcurs?

$$\mathbf{R}: v = v_0 e^{-kx}$$

1.4. O barcă cu motor întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. În momentul când viteza bărcii este $v_0 = 20 \text{ m/s}$, motorul este oprit și după un timp $\tau = 17,2 \text{ s}$ viteza bărcii devine de e ori mai mică (e – baza logaritmului natural). Să se determine distanța parcursă de barcă în acest timp.

$$\mathbf{R}: d = \frac{v_0 \tau}{e - 1} = 100 \text{ m}.$$

1.5. Un corp punctiform de masă m poate să se miște rectiliniu (în lungul axei Ox , de exemplu). Asupra lui acționează o forță îndreptată în lungul aceleiași axe, în sens pozitiv, egală cu $F = k^2 mx$, unde k este un coeficient constant iar x abscisa corpului. La momentul inițial, corpul se află în repaus la distanța d de originea axei de mișcare. Să se afle ecuația spațiului parcurs de corp neglijând frecarea dintre corp și plan.

$$\mathbf{R:} \quad x = \frac{d}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = d \cdot \cosh kt$$

1.6. Mișcarea în linie dreaptă a unui automobil de masă $m = 1200 \text{ kg}$ cu o viteză uniformă v necesită, pentru a putea învinge diversele frecări și rezistența aerului, o forță orizontală a cărei valoare, în newtoni, este dată de relația $F = 850 + 2v^2$ (v în m/s). Să se determine forța de rezistență și puterea automobilului, în ipoteza mișcării uniforme, în funcție de viteza acestuia.

$$\mathbf{R:} \quad F_r = 2v^2 \text{ (N)}; P = (850 + 2v^2) \cdot v \text{ (W)}$$

1.7. Un punct material de masă m se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R sub acțiunea unei forțe centrale de atracție $\vec{F} = -\frac{k}{R^3} \vec{R}$, al cărei suport trece prin centrul cercului iar k este o constantă pozitivă. Determinați: a) energia cinetică, potențială și totală a punctului material; b) impulsul și momentul cinetic al punctului material.

$$\mathbf{R:} \quad T = \frac{k}{2R}; U = -\frac{k}{R}; p = \sqrt{\frac{k}{mR}}; L = \sqrt{kmR}$$

1.8. Stabiliți forma suprafețelor echipotențiale pentru următoarele câmpuri centrale conservative: câmpul gravitațional terestru, în apropierea suprafeței Pământului ($|\vec{g}| = \text{const.}, \vec{G} = m\vec{g}$); b) câmpul forțelor de atracție newtoniene, $\vec{F} = -\frac{km}{r^3} \vec{r}$, unde k este o constantă pozitivă iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție al corpului de masă m față de centrul de forță.

R: a) plane paralele cu planul xOy ; b) sfere cu centrul în originea sistemului de axe de coordonate.

1.9. Determinați viteza unei particule relativiste dacă:

- a) impulsul relativist este mai mare de $\eta = 2$ ori decât impulsul newtonian al particulei;
- b) energia cinetică a particulei este egală cu energia sa de repaus.

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } v = \frac{c}{\eta} \sqrt{\eta^2 - 1} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}; \quad \text{b) } v = \frac{c}{2} \sqrt{3} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

1.10. O particulă cu masa de repaus m_0 se deplasează de-a lungul axei Ox a unui referențial după legea $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$, unde a este o constantă, c viteza luminii, iar t timpul. Să se determine ce forță se exercită asupra particulei în acest referențial.

$$\mathbf{R:} \quad F = \frac{m_0 c^2}{a}.$$

1.11. Determinați accelerația unui electron în mișcare relativistă sub acțiunea unei forțe constante, la momentul în care energia sa cinetică devine T .

$$\mathbf{R:} \quad a = \frac{F}{m_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{T}{m_0 c^2}} \right)^3$$

CAPITOLUL 2

OSCILAȚII ȘI UNDE ELASTICE

2.1. OSCILAȚII ELASTICE

Orice mișcare în care se face o transformare periodică sau pseudoperiodică a unei forme de energie în alta poartă numele de **oscilație**. Oscilațiile *elastice* sunt acele oscilații în care energia cinetică se transformă în energie potențială și invers.

Oscilația unui sistem izolat declanșată printr-un impuls inițial care are frecvență constantă se numește *oscilație liberă (proprie)* iar frecvența mișcării oscilatorii - *frecvență proprie*.

Dacă mărimile ce caracterizează mișcarea oscilatorie (masa, constantele elastice, coeficienții de proporționalitate între forțele de frecare și viteze) rămân constante în timp, oscilația este *liniară*.

2.1.1. Mișcarea oscilatorie armonică

Mișcarea oscilatorie armonică reprezintă mișcarea unui sistem mecanic *izolat* de-o parte și de alta a unei poziții de echilibru. Printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință, se poate considera că mișcarea este unidimensională, în lungul axei Ox. Starea de echilibru corespunde poziției în care energia potențială este minimă, adică

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0,$$

unde x_0 este coordonata poziției de echilibru. Dacă sistemul este depărtat de poziția de echilibru ia naștere o forță *elastică* care, pentru sistemul izolat, derivă din energia potențială (1.1.35) :

$$\vec{F} = - \text{grad } U = - \frac{dU}{dx} \cdot \vec{1}_x \quad (2.1.1)$$

Pentru determinarea acestei forțe e necesară cunoașterea energiei potențiale.

Pentru deplasări mici ($x - x_0$) față de poziția de echilibru expresia energiei potențiale corespunzătoare poziției x se poate dezvolta în serie Taylor (relația A.1.10), cu limitare la primii termeni :

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (2.1.2)$$

Din condiția de echilibru, rezultă că al doilea termen din dezvoltare este nul. Dacă alegem prin convenție $x_0 = 0$ și $U(x_0) = 0$, expresia (2.1.2) devine :

$$U(x) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=0} x^2 \quad (2.1.3)$$

Notând *constanta elastică* cu

$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=0} > 0 \quad (2.1.4)$$

relația (2.1.3) devine :

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.1.5)$$

de unde rezultă expresia forței (2.1.1) ce acționează asupra sistemului mecanic:

$$\vec{F} = - kx \cdot \vec{1}_x \quad (2.1.6)$$

Această forță este o forță de tip *elastic*, fiind îndreptată spre poziția de echilibru și având intensitatea proporțională cu deplasarea.

Constanta elastică k dată de (2.1.4) caracterizează câmpul de forțe și este dependentă de natura mediului.

Dacă se reduce sistemul mecanic la un punct material cu masa m , ecuația de mișcare a acestuia sub acțiunea forței elastice este :

$$m \ddot{x} = -k x \Leftrightarrow m \ddot{x} + k x = 0 .$$

Împărțind ecuația prin m se obține :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1.7)$$

unde s-a notat

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.1.8)$$

ω_0 fiind *pulsatia proprie*.

Ecuația (2.1.7) este o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți, cu soluții de forma $e^{\lambda t}$ și care introduse în ecuația (2.1.7) determină *ecuația caracteristică* pentru λ :

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (2.1.9)$$

având soluțiile pur imaginare:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega_0 \quad (2.1.10)$$

Ținând cont de relația (2.1.10) se obține soluția generală a ecuației (2.1.7) de forma unei combinații liniare a soluțiilor liniar independente $e^{\lambda_1 t}$ și $e^{\lambda_2 t}$:

$$x = C' e^{i \omega_0 t} + C'' e^{-i \omega_0 t} \quad (2.1.11)$$

C' și C'' fiind constante arbitrare de integrare, în general complexe. Pentru ca x să fie o mărime reală, adică $x = x^*$ (x^* fiind conjugata lui x), trebuie ca $C' = C''^*$.

Folosind relațiile lui Euler : $e^{\pm i a} = \cos a \pm i \sin a$, se obține :

$$x = (C' + C'') \cos \omega_0 t + i(C' - C'') \sin \omega_0 t$$

sau :

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (2.1.12)$$

unde $C_1 = (C' + C'')$ și $C_2 = i(C' - C'')$ sunt constante *reale* (deoarece $C' = C''^*$).

Notând :

$$\begin{aligned} C_1 &= A \cos \varphi, \\ C_2 &= -A \sin \varphi, \end{aligned} \quad \text{unde } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{C_2}{C_1},$$

expresia lui x din (2.1.12) devine :

$$x = A \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (2.1.13)$$

Uneori soluția (2.1.13) se exprimă sub forma

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi) \quad (2.1.13')$$

sau sub formă complexă:

$$x = A e^{i (\omega_0 t + \varphi)} \quad (2.1.13'')$$

convenind ca partea reală să reprezinte mărimea fizică considerată.

Mișcarea exprimată de (2.1.13) sau (2.1.13') este o **mișcare oscilatorie armonică** fiind descrisă de o funcție cosinus sau sinus; x reprezintă *elongația*, A - *amplitudinea* mișcării (valoarea maximă a elongației), $\Phi = \omega_0 t + \varphi$ - *faza* mișcării iar φ - *faza inițială* a mișcării. Mișcarea este periodică deoarece elongația ia valori identice în momente separate între ele prin intervalul T numit *perioada oscilației*.

Din condiția:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos[\omega_0 (t + T) + \varphi] = \dots = A \cos[\omega_0 (t + nT) + \varphi]$$

sau

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos[\omega_0 (t + T) + \varphi]$$

rezultă :

$$\omega_0 (t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$

sau

$$\omega_0 T = 2\pi$$

de unde perioada este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.1.14)$$

Numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp se numește *frecvență*:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2.1.15)$$

În timpul oscilației, viteza și accelerația oscilatorului sunt variabile în timp:

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Energia totală a oscilatorului este :

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \quad (2.1.16)$$

fiind constantă în orice moment, așa cum rezultă din teorema conservării energiei mecanice (1.1.42) pentru un sistem izolat.

2.1.2. Mișcarea oscilatorie amortizată

În realitate oscilațiile unui punct material se produc cu disipare de energie datorită existenței forțelor de frecare din partea mediului.

Pentru viteze mici se consideră că forța de frecare este proporțională în orice moment cu viteza, fiind de forma:

$$F_f = -r v = -r \dot{x}, \quad r > 0$$

unde r se numește *coeficientul de rezistență al mediului*.

Astfel, pe lângă forța elastică, apare și forța de frânare care se opune deplasării, legea fundamentală a dinamicii fiind în acest caz :

$$m \ddot{x} = F_e + F_f \Leftrightarrow m \ddot{x} = -kx - r \dot{x}$$

sau :

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = 0 \quad (2.1.17)$$

Împărțind prin m și notând

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{și} \quad \frac{r}{m} = 2\beta \quad (2.1.18)$$

unde β se numește *factor de amortizare*, ecuația (2.1.17) devine :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1.19)$$

care este o ecuație diferențială omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți care are soluții de forma $e^{\lambda t}$ și care, introduse în (2.1.19), implică ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.1.20)$$

cu soluțiile :

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.1.21)$$

Soluția generală a ecuației (2.1.19) este :

$$x = C'e^{\lambda_1 t} + C''e^{\lambda_2 t}$$

sau, înlocuind (2.1.21) :

$$x = e^{-\beta t} \left(C'e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C''e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) \quad (2.1.22)$$

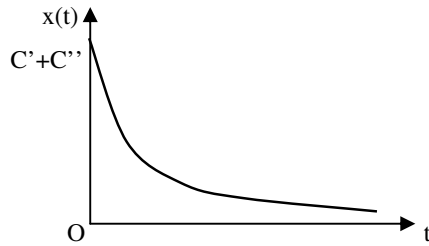


Fig. 2.1.1

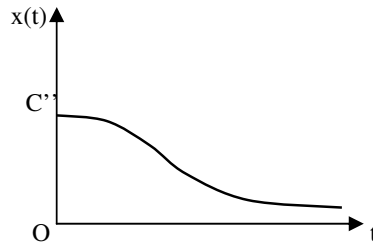


Fig. 2.1.2

În funcție de relația dintre β și ω_0 , se disting trei cazuri :

1) Dacă $\beta > \omega_0$ frecarea este puternică, soluțiile ecuației caracteristice (2.1.20) sunt reale, mișcarea este **amortizată aperiodică**, elongația scăzând monoton și tinzând către 0 când $t \rightarrow \infty$ (fig. 2.1.1), sistemul revenind la poziția de echilibru (x nu-și schimbă semnul, oscilatorul nu trece de cealaltă parte a poziției de echilibru, pierzându-și întreaga energie într-un sfert de perioadă).

2) Dacă $\beta = \omega_0$ (cazul **amortizării critice**) ecuația caracteristică (2.1.20) are o rădăcină multiplă (dublă), $\lambda_{1,2} = -\beta$, și soluția generală este de forma unei combinații liniare a soluțiilor liniar independente $e^{\lambda t}$ și $t \cdot e^{\lambda t}$:

$$x = e^{-\beta t} (C't + C'')$$

mișcarea fiind și în acest caz aperiodică (fig. 2.1.2).

3) Dacă $\beta < \omega_0$ forța de frecare este slabă și soluțiile (2.1.21) ale ecuației caracteristice sunt complexe :

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega_a \quad (2.1.23)$$

unde s-a notat cu ω_a pseudopulsafia oscilațiilor:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.1.24)$$

Soluția generală (2.1.22) a ecuației diferențiale (2.1.19) devine :

$$x = e^{-\beta t} (C'e^{i\omega_a t} + C''e^{-i\omega_a t})$$

Folosind raționamentul de obținere a relației $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ din paragraful precedent se obține :

$$x = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega_a t + C_2 \sin \omega_a t)$$

sau :

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad (2.1.25)$$

Ecuția (2.1.25) arată că mișcarea este **pseudoperiodică**, deci este oscilatorie - fapt indicat de factorul $\cos(\omega_a t + \varphi_a)$ - dar amplitudinea scade în timp după legea exponențială :

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (2.1.26)$$

Graficul variației elongației mișcării oscilatorii amortizate (2.1.25) în funcție de timp este arătat în figura 2.1.3 (curba plină), curbele punctate reprezentând funcția $x = \pm A_0 e^{-\beta t}$.

Perioada mișcării amortizate este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Amortizarea oscilațiilor se poate caracteriza prin mărimea δ , numită *decrement logarithmic* și care reprezintă logaritmul natural al raportului a două amplitudini consecutive :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

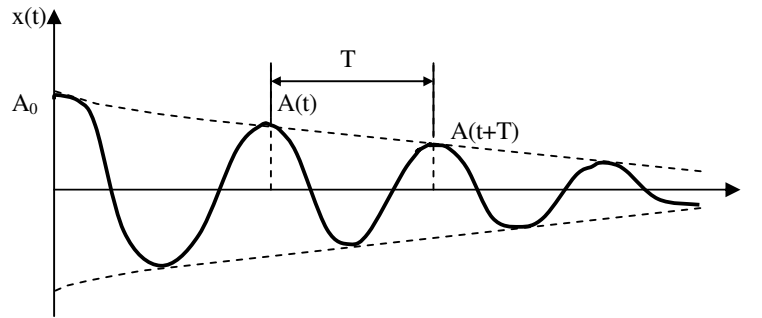


Fig. 2.1.3

Dacă se cunoaște amplitudinea inițială A_0 și amplitudinea după n oscilații complete, A_n , se obține :

$$\frac{A_0}{A_n} = \frac{A_0}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \dots \frac{A_{n-1}}{A_n} \Rightarrow \ln \frac{A_0}{A_n} = \sum_{j=1}^n \ln \frac{A_{j-1}}{A_j}$$

și cum fiecare logaritm natural din sumă este egal cu δ se obține :

$$\ln \frac{A_0}{A_n} = n\delta \Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}$$

O măsură a duratei oscilațiilor amortizate este inversul coeficientului de amortizare β , $\tau = \frac{1}{\beta}$, numit *timp de relaxare* care arată în cât timp amplitudinea oscilațiilor scade de e ori.

2.1.3. Mișcarea oscilatorie întreținută (forțată). Rezonanța

Pentru a împiedica amortizarea mișcării oscilatorii sub acțiunea forței de frecare, i se transmite oscilatorului energie din exterior, acționându-se cu o forță periodică de forma :

$$F_p = F_0 \cos \omega t$$

Ecuția mișcării se scrie în acest caz :

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2.1.27)$$

Soluția ecuației neomogene (2.1.27) se scrie ca suma $x = x_1 + x_2$ (fig. 2.1.4) dintre soluția generală a ecuației omogene cu aceiași coeficienți, de forma (2.1.25) :

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_a\right)$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene, de forma membrului drept :

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1.28)$$

Datorită amortizării, pentru un interval de timp suficient de lung soluția x_1 (**regimul tranzitoriu**) poate fi neglijată, oscilațiile sistemului fiind descrise de soluția x_2 . Mișcarea descrisă de această soluție se numește **regim staționar**; oscilațiile se efectuează cu o pulsație egală cu cea a forței de întreținere și nu cu pulsația proprie.

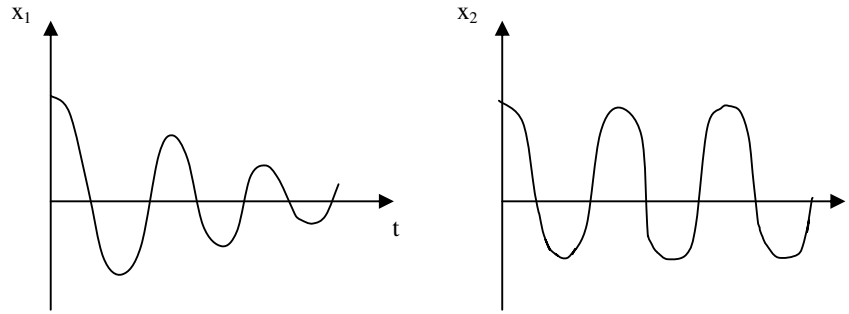


Fig. 2.1.4

Amplitudinea A și faza inițială φ se determină din condiția ca x_2 dată de relația (2.1.28) să verifice ecuația (2.1.27). Înlocuind:

$$\dot{x}_2 = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) ; \ddot{x}_2 = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

și notând

$$\frac{F_0}{m} = f_0 \quad (2.1.29)$$

ecuația (2.1.27) devine :

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta\omega A \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t$$

sau, scriind

$$f_0 \cos \omega t = f_0 \cos(\omega t + \varphi - \varphi)$$

rezultă

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta\omega A \sin(\omega t + \varphi) = f_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \varphi + f_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin \varphi$$

Identificând coeficienții termenilor $\cos(\omega t + \varphi)$ și $\sin(\omega t + \varphi)$ din ambii membri ai ecuației se obține :

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \cos \varphi \\ -2\beta\omega A = f_0 \sin \varphi \end{cases} \quad (2.1.30)$$

de unde rezultă prin împărțirea relațiilor :

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.1.31)$$

Înlocuind

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

în prima relație a sistemului (2.1.30) și ținând cont de notația (2.1.29), se obține amplitudinea oscilațiilor forțate :

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (2.1.32)$$

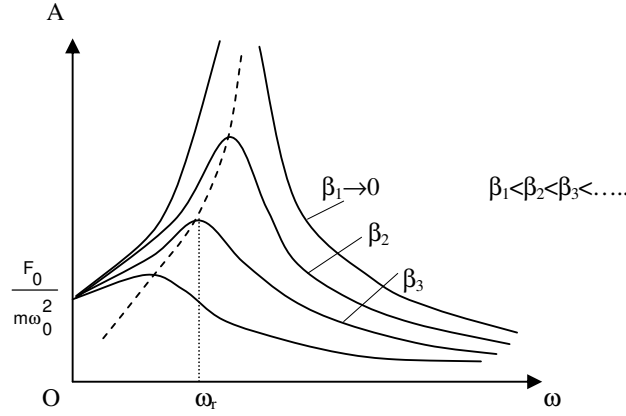


Fig. 2.1.5

Amplitudinea și faza inițială a mișcării oscilatorii întreținute, în regim staționar, depind de raportul dintre pulsația ω a forței periodice de întreținere și pulsația ω_0 a oscilațiilor proprii. Dependența amplitudinii oscilațiilor întreținute de pulsația forței este redată în figura 2.1.5. Oscilațiile nu sunt în fază cu forța de întreținere (cu excepția cazului în care $\beta = 0$). Amplitudinea prezintă un maxim pentru o pulsație ω_r numită *pulsație de rezonanță* și care se obține din condiția $\left(\frac{dA}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_r} = 0$ adică:

$$\left. -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{3/2}} \right|_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Fenomenul de apariție a unui maxim de amplitudine a mișcării întreținute se numește **rezonanță**. Maximul amplitudinii,

$$A_{\max} = A(\omega_r) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

este cu atât mai mare cu cât coeficientul de amortizare β este mai mic, tinzând către ∞ când $\beta \rightarrow 0$. Cu cât factorul de amortizare β este mai mic, cu atât pulsația de rezonanță se apropie de valoarea pulsației oscilațiilor proprii.

Fenomenul de rezonanță are numeroase aplicații în fizică și tehnică, stând la baza funcționării radioreceptoarelor, instrumentelor de măsură, instrumentelor muzicale etc. În proiectarea unor organe de mașini trebuie să se asigure o frecvență proprie de oscilație a instalațiilor care să fie diferită de cea a vibrațiilor care apar în timpul funcționării acestora, pentru a evita atingerea unui maxim al amplitudinii care le-ar distruge.

2.1.4. Compunerea oscilațiilor armonice

2.1.4.1. Compunerea oscilațiilor armonice paralele cu pulsații egale

Dacă asupra unui punct material acționează simultan două sau mai multe forțe elastice, mișcarea efectuată de el este o mișcare rezultantă determinată de efectul independent al fiecărei forțe.

Considerăm că punctul material e supus simultan la două forțe elastice ce acționează pe direcția Ox și care determină mișcările oscilatorii redade de relațiile :

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}\quad (2.1.33)$$

Elongația rezultantă va fi suma elongațiilor oscilațiilor paralele independente :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2.1.34)$$

iar ecuația mișcării oscilatorii rezultante este de forma:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1.35)$$

Din (2.1.34) și (2.1.35) rezultă, egalând coeficienții lui $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$ din cei doi membri :

$$\begin{aligned}A \cos \varphi &= A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \\A \sin \varphi &= A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2\end{aligned}\quad (2.1.36)$$

de unde se obține:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (2.1.37)$$

Ridicând la pătrat relațiile (2.1.36) și adunându-le rezultă :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (2.1.38)$$

Relația (2.1.35) arată că oscilația rezultantă este tot o oscilație armonică, cu aceeași frecvență cu frecvența oscilațiilor ce se compun. Amplitudinea oscilației rezultante (2.1.38) este dependentă de diferența de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ dintre cele două oscilații.

Se disting **cazurile particulare** :

1°. Dacă $\Delta\varphi = 2n\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$, oscilațiile sunt în fază și amplitudinea oscilației rezultante este maximă și egală cu suma amplitudinilor oscilațiilor componente:

$$A = A_1 + A_2.$$

2°. Dacă $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$, oscilațiile sunt în antifază și amplitudinea oscilației rezultante este minimă :

$$A = |A_1 - A_2|.$$

3°. Dacă $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi/2$; $n = 0, 1, 2, \dots$, oscilațiile sunt în cuadratură și rezultă:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Relațiile (2.1.37) și (2.1.38) pot fi obținute și pe cale grafică folosind *metoda fazorială a lui Fresnel* prin reprezentarea amplitudinilor oscilațiilor componente prin vectori înclinați față de axa Ox cu unghiuri egale cu fazele inițiale ale oscilațiilor și compunerea lor după regula *paralelogramului* (fig. 2.1.6 a) sau a *poligonului* (fig. 2.1.6 b).

Generalizare. În cazul compunerii a n oscilații paralele de aceeași pulsație, amplitudinea și faza oscilațiilor rezultante sunt date de relațiile :

$$A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i\right)^2}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i}$$

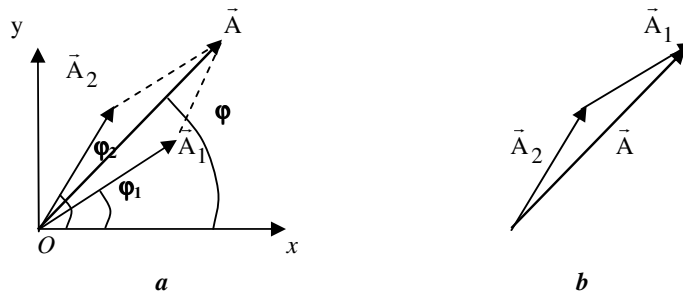


Fig. 2.1.6

2.1.4.2. Compunerea a două oscilații paralele cu pulsații puțin diferite. Fenomenul de bătăi

Presupunem că pulsațiile celor două oscilații sunt de forma :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega - \Delta\omega \\ \omega_2 &= \omega + \Delta\omega \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

unde $\Delta\omega \ll \omega$, deci fiecare diferă foarte puțin față de valoarea ω :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad (2.1.40)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.1.41)$$

Presupunând oscilații de aceeași amplitudine A_0 și faze inițiale φ_1 și φ_2 , elongațiile celor două oscilații vor fi de forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

iar elongația mișcării rezultante:

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

sau, notând

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad \varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

și ținând cont de relațiile (2.1.40) și (2.1.41):

$$x = 2A_0 \cos(\Delta\omega \cdot t + \Delta\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (2.1.42)$$

Dacă oscilația rezultantă se exprimă sub forma :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

rezultă că amplitudinea acesteia este :

$$A = 2A_0 \cos(\Delta\omega \cdot t + \Delta\varphi)$$

deci variază periodic în timp și mișcarea rezultantă *nu este* o oscilație *armonică* ci apare ca o oscilație modulată atât în amplitudine cât și în frecvență de o altă oscilație periodică (fig. 2.1.7). Succesiunea de maxime și minime ale amplitudinii oscilației rezultate prin compunerea a două oscilații paralele cu frecvențe puțin diferite poartă numele de **fenomen de bătăi**.

Perioada T_b de variație a amplitudinii rezultante (perioada bătăilor) se determină din condiția ca amplitudinea să fie maximă sau minimă, deci pentru :

$$|\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\omega t + \Delta\varphi = n\pi \\ \Delta\omega(t + T_b) + \Delta\varphi = (n+1)\pi \end{cases}$$

Scăzând cele două relații se obține :

$$T_b = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Perioada oscilațiilor, T , se determină din relația :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

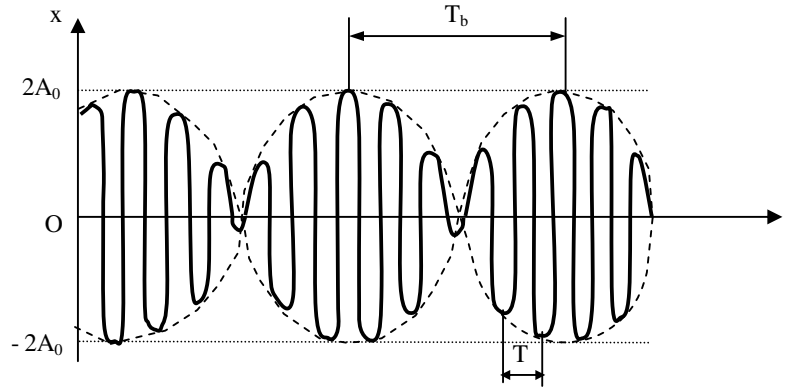


Fig. 2.1.7

2.1.4.3. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare cu pulsații egale

Presupunem două oscilații perpendiculare descrise de ecuațiile :

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Traectoria unui punct material supus simultan acestor oscilații se obține eliminând timpul din cele două ecuații (2.1.43). Scriind cele două ecuații sub forma :

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_2$$

rezultă prin eliminarea succesivă a lui $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$:

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = \sin\omega t (\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)$$

$$\frac{x}{A_1} \sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin\varphi_1 = \cos\omega t (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1)$$

Ridicând ultimele relații la pătrat și adunându-le se obține :

$$\left(\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1\right)^2 = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.1.44)$$

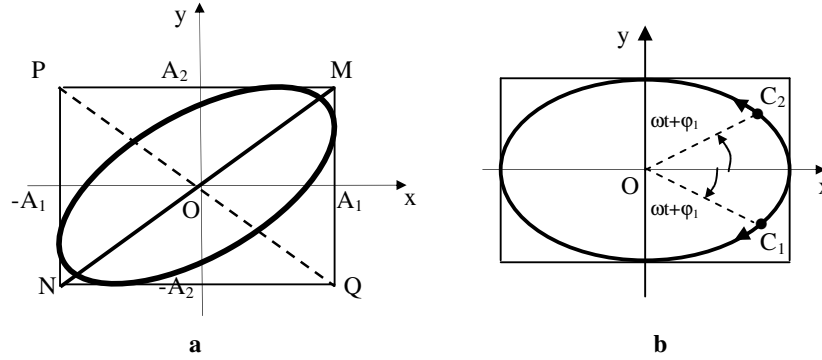


Fig. 2.1.8

Traectoria punctului material descrisă de ecuația (2.1.44) reprezintă o elipsă de semiaxe A_1 și A_2 , cu centrul în originea sistemului de axe de coordonate xOy , înscrisă într-un dreptunghi de laturi $2A_1$ și $2A_2$. Forma elipsei depinde de defazajul $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ dintre cele două oscilații (fig. 2.1.8 a).

Cazuri particulare

1°. Dacă $\Delta\varphi = 2n\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$ din (2.1.44) rezultă ecuația:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

care reprezintă două drepte confundate situate în cadranele I și III (fig. 2.1.8 a). Oscilația rezultantă este *polarizată liniar* (diagonala MN a dreptunghiului în care este înscrisă elipsa) și are amplitudinea

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

2°. Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$ din (2.1.44) rezultă ecuația unei drepte:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

care reprezintă diagonala PQ din cadranele II și IV a dreptunghiului în care este înscrisă elipsa. Oscilația rezultantă este de asemenea *polarizată liniar* și are amplitudinea

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

3°. Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ din (2.1.44) se obține :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (2.1.45)$$

care este ecuația unei elipse cu centrul în originea O a sistemului de axe de coordonate, ale cărei axe coincid cu direcțiile de-a lungul cărora se produc oscilațiile (fig. 2.1.8 b). Valorile diferenței de fază $\Delta \varphi$ dau sensul de parcurs al traiectoriei.

Astfel:

a) dacă n este par (spre exemplu $n=0$):

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -A_2 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

și punctul material C_1 (fig. 2.1.8.b) se mișcă pe traiectorie în sens invers trigonometric și oscilația este *polarizată eliptic dreaptă*.

b) dacă n este impar (spre exemplu $n=1$):

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \frac{3\pi}{2}) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

și punctul material C_2 (fig. 2.1.8.b) se mișcă pe traiectorie în sens trigonometric și oscilația este *polarizată eliptic stângă*.

Din relația (2.1.45) dacă $A_1 = A_2 = A$ rezultă $x^2 + y^2 = A^2$ deci elipsa devine un cerc înscris într-un pătrat de latură $2A$.

În concluzie, pentru $\Delta \varphi$ egal cu număr întreg de π , elipsa degenerază într-o dreaptă. Dacă $0 < \Delta \varphi < \pi$ se obțin elipse drepte (elipsa parcursă în sens invers trigonometric) și dacă $\pi < \Delta \varphi < 2\pi$ se obțin elipse stângi (elipsa parcursă în sens trigonometric), conform figurii 2.1.9.

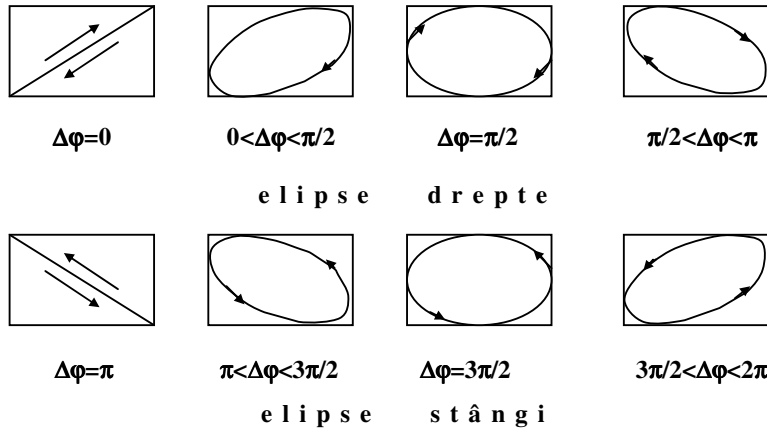


Fig. 2.1.9

2.1.4.4. Compunerea oscilațiilor perpendiculare de pulsații oarecare

Când cele două semnale sinusoidale au pulsații diferite $\omega_1 \neq \omega_2$, atunci traiectoria punctului descrie o serie de curbe compuse din mai multe ramuri, numite *figuri Lissajous*.

Figurile Lissajous pot fi *închise* sau *deschise* după cum *este* sau *nu este îndeplinită* condiția ca punctul ce oscilează să treacă printr-un același punct $P'(x_1', y_1')$ după un același interval de timp T' , adică:

$$\begin{aligned} x_1 = x_1' &\Rightarrow A_1 \cos[\omega_1(t + k_1 T_1) + \phi_1] = A_1 \cos[\omega_1(t + T') + \phi_1] \\ y_1 = y_1' &\Rightarrow A_2 \cos[\omega_2(t + k_2 T_2) + \phi_2] = A_2 \cos[\omega_2(t + T') + \phi_2] \end{aligned}$$

Deci după intervalul de timp

$$T' = k_1 T_1 = k_2 T_2$$

valorile elongațiilor x și y se vor repeta, căci în acest interval de timp se efectuează k_1 oscilații complete după axa Ox și k_2 oscilații complete după axa Oy .

Rezultă condițiile:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_1} k_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} k_2$$

sau :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

adică, pentru ca figurile Lissajous să fie curbe închise trebuie ca raportul pulsațiilor celor două oscilații să fie un număr *rațional*.

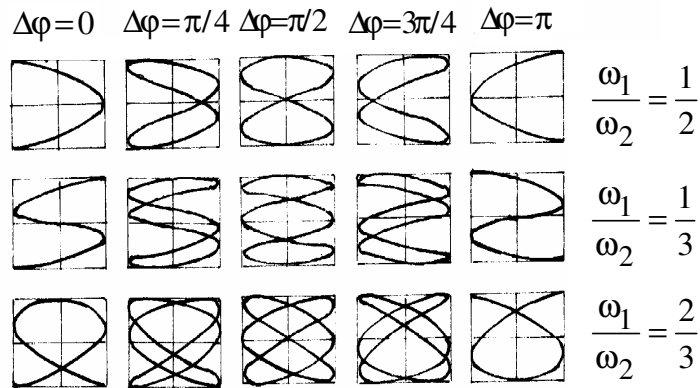


Fig. 2.1.10

Aplicând cele două oscilații pe plăcile unui osciloscop catodic se observă pe ecranul acestuia o *figură stabilă* închisă numai atunci când *raportul* dintre numărul punctelor de contact ale figurii Lissajous cu o linie orizontală și una verticală care ar închide figura *este un număr rațional* (exemple în fig. 2.1.10).

Dacă raportul frecvențelor este un număr rațional, traiectoria e stabilă (fixă) dar forma depinde și de $\Delta\phi$.

Dacă $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{Q}$ atunci punctul descrie o curbă care acoperă treptat o arie.

2.2. UNDE ELASTICE

2.2.1. Generalități

Mediile *continue* sunt sisteme de particule *legate* (molecule, atomi, ioni), adică particule care interacționează între ele astfel încât dacă una din particule oscilează, vor oscila după ea și particulele vecine. O mișcare oscilatorie, imprimată unui punct dintr-un mediu *elastic*, se comunică progresiv și celorlalte puncte ale mediului. Punctul material ce a fost pus în stare de vibrație devine un *izvor (sursă)* de oscilații care se propagă în toate direcțiile din spațiu. Propagarea din aproape în aproape a unei perturbații în mediul elastic poartă numele de **undă elastică**.

Mediile care determină anumite particularități ale propagării undelor pot fi clasificate astfel:

- *omogene* sau *neomogene*;
- *izotrope* sau *anizotrope*;
- *liniare* sau *neliniare*;
- *dispersive* sau *nedispersive*;
- *conservative* sau *disipative*.

Un mediu este :

- *omogen* dacă proprietățile fizice sunt aceleași în orice punct, independent de coordonate;
- *anizotrop* dacă proprietățile fizice variază în raport cu direcția și *izotrop* dacă nu există direcții privilegiate pentru aceste proprietăți;
- *liniar* dacă perturbația globală provenită prin suprapunerea mai multor unde de același tip, descrise de funcțiile de undă $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, este redată de o funcție de undă:

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \psi_i ;$$

- *dispersiv* dacă viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile mediului;
- *disipativ* dacă propagarea se face cu absorbție de energie și *conservativ* dacă propagarea nu se face cu absorbție de energie.

Un mediu este *ideal* dacă este *omogen, izotrop, liniar, nedispersiv și conservativ*.

Undele elastice sunt generate în medii elastice de către *perturbații mecanice* care constau într-o deformare locală a mediului (întindere, comprimare, forfecare, încovoieră etc.) producând variația locală a diferiților parametri caracteristici mediului, de exemplu poziția unui punct material din mediu, viteza acestuia, presiunea, densitatea etc., care vor fi funcții atât de poziție, cât și de timp. Vom considera în continuare numai medii ideale, ale căror proprietăți elastice sunt caracterizate de două constante elastice independente: *modulul de elasticitate la tracțiune* (modulul lui Young) **E** și *modulul de lunecare (forfecare)* **G**.

Locul geometric al punctelor din mediul elastic care oscilează în fază se numește **suprafață de undă**. Suprafețele de undă pot fi de diferite forme (sferice, plane, cilindrice, eliptice etc.), în funcție de mediul de propagare și de forma izvorului de unde. Dacă toate particulele situate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei oscilează identic, unda se numește **plană**.

Unele dintre mărimile fizice caracteristice punctelor mediului sunt *scalare*, de exemplu presiunea sau densitatea, altele sunt *vectoriale*, de exemplu deplasarea sau viteza, iar în mediile anizotrope, unele mărimi pot fi tensoriale. O mărime vectorială caracteristică propagării unei unde elastice oscilează după o direcție care formează un unghi $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cu direcția de propagare a undei.

În particular, dacă $\theta = 0$ undele se numesc **longitudinale**, iar dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ undele se numesc **transversale**. Pentru $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ unda se poate descompune întotdeauna într-o undă longitudinală și o undă transversală.

O caracteristică importantă a undelor elastice este deplasarea fiecărui punct material al mediului față de poziția lui de echilibru. Referindu-ne la această mărime, în cele ce urmează vom vorbi despre unde longitudinale și despre unde transversale. În timp ce undele longitudinale se propagă atât în fluide (lichide și gaze), cât și în solide, undele transversale nu se propagă decât în solide și numai în anumite condiții la suprafața lichidelor.

Un caz particular de unde elastice îl constituie *undele sonore (sunete)* care impresionează urechea producând o senzație auditivă. Apariția acestora presupune o durată a excitației superioară la 0,06 s (altfel se produce senzația de pocnet), o frecvență cuprinsă între aproximativ 20 Hz și 16 kHz (limitele variază).

Undele elastice cu frecvențe mai mari de 16 kHz, neaudibile, sunt numite *ultrasunete*. Datorită lungimii de undă foarte redusă, efectele de difracție ale ultrasunetelor se manifestă numai la dimensiuni foarte mici ale neomogenităților mediului, astfel încât orificii cu dimensiuni de ordinul mm pot delimita fascicule direcționale de ultrasunete. Coroborând acest efect cu intensitățile apreciabile care se pot realiza, ultrasunetele prezintă numeroase aplicații practice (§ 2.2.10).

Infrasunetele sunt unde elastice cu frecvențe mai mici de 20 Hz. Având o absorbție extrem de redusă, se propagă pe distanțe de sute sau mii de km. Infrasunetele pot determina vibrații ale postamentelor mașinilor și ale clădirilor, cu efecte nedorite asupra stabilității și duratei de serviciu. Infrasunetele sunt produse de diverse fenomene naturale: furtuni, mari meteoriți, valuri marine, explozii vulcanice, microseisme, cutremure. Apar și ca efecte secundare în tehnică, asemenea, surse fiind sisteme cu rotații lente (compresoare, ventilatoare), poduri supuse la trafic intens, vehicule cu viteze supersonice, explozii puternice.

2.2.2. Ecuația undei plane monocromatice

Să găsim legea de oscilație a unui punct aflat pe direcția de propagare a undei, la o distanță oarecare de izvorul de oscilație.

Fie punctul O (centrul de oscilație) originea sistemului de coordonate, în care oscilează o particulă. Aceste oscilații se transmit mediului elastic pe direcția Ox, oscilațiile producându-se perpendicular pe această direcție (fig. 2.2.1). Orice formă ar avea unda, pentru ca fenomenul vibrator din O să înceapă și în punctul P, aflat la distanța x de O, trebuie să treacă un interval de timp $\tau = \frac{x}{v}$ (interval de defazare) necesar oscilației să se transmită din O în P.

Elongația particulei din O este de forma:

$$y_O = A \sin \omega t$$

Luând ca origine a timpului momentul în care punctul O a început să oscileze, particula din punctul P va începe să oscileze după timpul τ , elongația oscilației fiind :

$$y = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\text{sau} \quad y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.2.1)$$

unde

$$\lambda = v T$$

este *lungimea de undă*, definită ca distanța parcursă de suprafața de undă în timp de o perioadă .

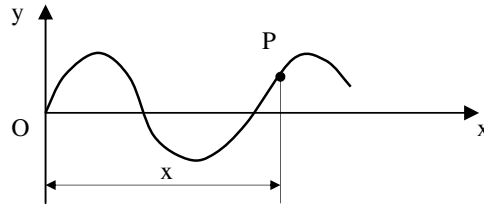


Fig. 2.2.1

Relația (2.2.1) dă legea de oscilație a unui punct material situat pe direcția de propagare a undelor, la distanța arbitrară x de originea oscilațiilor și se numește **ecuația undei plane**.

Diferența de fază față de oscilațiile din punctul O este :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda} = kx,$$

unde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.2.2)$$

este **numărul de undă** definit ca numărul de lungimi de undă cuprinse în distanța de 2π metri. Ecuația (2.2.1) se scrie astfel :

$$y = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.2.3)$$

Deoarece elongația y depinde atât de poziție cât și de timp, interesează legătura dintre cele două variabile ale elongației. Folosind un calcul simplu, se poate ajunge la altă formă a ecuației undei plane. Considerând axa Ox drept direcție de propagare, se calculează derivatele de ordinul al doilea ale elongației y în raport cu coordonata x și cu timpul :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 y$$

de unde rezultă

$$y = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.2.4)$$

și de asemenea

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(\omega t - kx) = -k^2 y$$

de unde :

$$y = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.2.5)$$

Egalând (2.2.4) cu (2.2.5) rezultă:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

sau, ținând cont de (2.2.2) și de relațiile

$$\omega = 2\pi/T$$

și

$$\lambda = v T,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.2.6)$$

care este *ecuația diferențială de propagare a undelor plane*. Relația (2.2.3) este un caz particular al soluției ecuației cu derivate parțiale (2.2.6).

2.2.3. Propagarea undelor longitudinale în solide

În continuare să stabilim ecuația de propagare a *undei longitudinale plane* în medii solide și să găsim viteza undelor longitudinale în aceste medii.

Să admitem că de-a lungul unei direcții oarecare se găsesc repartizate uniform particulele care constituie mediul elastic. Dacă o perturbație atinge prima particulă, aceasta se va apropia de particula vecină, producându-se astfel o comprimare. În acest caz apar forțe elastice, care tind să readucă particulele la poziția inițială. Datorită acestui fapt, în locul în care a avut loc comprimarea se produce o dilatare și așa mai departe. Rezultă, deci, că propagarea undelor longitudinale se face prin comprimări și dilatări (rarefierii) succesive.

a) Deformațiile în unda longitudinală în solide

Considerăm că undele longitudinale se propagă într-o bară pe direcția Ox. Fie $\epsilon(x, t)$ deformația elastică *relativă* la momentul t din planul transversal $P(x)$ care are poziția de echilibru x (fig. 2.2.2). Pentru a calcula această deformație relativă considerăm, pe lângă planul $P(x)$, un plan infinit apropiat $Q(x+dx)$. Coordonatele x și $x+dx$ reprezintă pozițiile de echilibru (de repaus) ale particulelor din planul P respectiv Q astfel încât segmentul $PQ = dx$ reprezintă grosimea *nedeformată* a stratului.

Sub acțiunea undei la momentul t particulele din planul $P(x)$ au elongația $\xi(x, t)$ și deci sunt deplasate în planul P' care are coordonata $x + \xi(x, t)$ iar particulele din planul $Q(x+dx)$ se vor deplasa în planul Q' de coordonată $x+dx + \xi(x+dx, t)$ deoarece elongația particulelor din punctul infinit vecin $Q(x+dx)$ este :

$$\xi(x+dx, t) = \xi(x) + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} dx \quad (2.2.7)$$

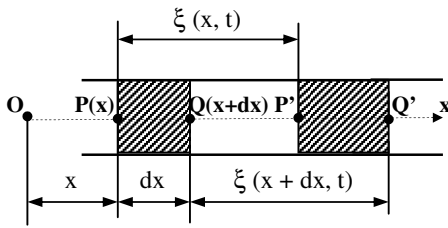


Fig. 2.2.2

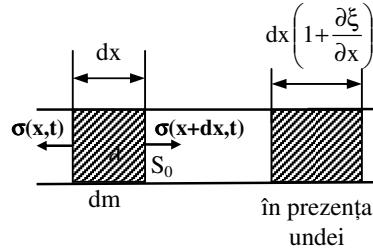


Fig. 2.2.3

Grosimea stratului inițial (nedeformat) $PQ = dx$ devine la momentul t egală cu :

$$P'Q' = PQ + QQ' - PP' = dx + \xi(x+dx, t) - \xi(x, t)$$

sau, ținând cont de (2.2.7) :

$$P'Q' = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

Alungirea absolută va fi

$$\delta = P'Q' - PQ = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

iar cea relativă

$$\epsilon = \frac{\delta}{PQ} = \frac{\delta}{dx}$$

adică:

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.2.8)$$

Deci, cunoscând elongația $\xi(x, t)$ din unda longitudinală, prin derivarea acesteia în raport cu coordonata x obținem deformația elastică ale mediului.

Cealaltă derivată parțială a elongației, în raport cu timpul, reprezintă viteza particulelor din undă :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{\xi} \quad (2.2.9)$$

b) Viteza undelor longitudinale în solide

Pentru a deduce viteza de propagare a undelor vom stabili mai întâi ecuația undelor. Pentru aceasta vom considera un element de masă dm din solid (spre exemplu o bară), de lungime dx și de volum dV (fig. 2.2.3) pentru care vom scrie ecuația fundamentală a dinamicii, $dF = dm \cdot a$, unde accelerația este

$$a = \ddot{v} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

iar

$$dm = \rho_0 S_0 dx,$$

ρ_0 fiind densitatea în absența undei:

$$dF = \rho_0 S_0 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.2.10)$$

Vom considera că deformațiile elastice sunt mici și că este valabilă legea lui Hooke.

Cunoscând elongațiile $\xi(x, t)$ din undă, prin derivare obținem deformațiile relative $\epsilon(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

(conform relației 2.2.8) iar de aici, aplicând legea lui Hooke obținem tensiunea elastică (efortul unitar):

$$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{S_0} = E \epsilon(x, t) = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.2.11)$$

unde $F(x, t)$ este forța deformatoare iar E – modulul lui Young.

În prezența undei stratul considerat va fi supus unei forțe suplimentare și deplasat la un moment ulterior între coordonatele $x + \xi(x, t)$ și $x + dx + \xi(x + dx, t)$. Dacă pe secțiunea de la coordonata x acționează forța $F_x = \sigma(x, t) S_0$ iar pe cea de la coordonata $x + dx$ forța $F_{x+dx} = \sigma(x + dx, t) S_0$, forța rezultantă va fi:

$$dF = \sigma(x + dx, t) S_0 - \sigma(x, t) S_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx S_0$$

unde tensiunea $\sigma(x + dx, t)$ s-a dezvoltat în serie Taylor cu limitare la primii termeni:

$$\sigma(x + dx, t) = \sigma(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

Conform legii fundamentale a dinamicii (2.2.10) rezultă:

$$dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx S_0 = dm \cdot a = \rho_0 S_0 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

de unde se obține:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.2.12)$$

Dar din (2.2.11) rezultă :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

și (2.2.12) devine :

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.2.13)$$

Relația (2.2.13) reprezintă **ecuația undelor longitudinale în solide**, care se scrie și sub forma :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.2.13')$$

unde

$$\frac{E}{\rho_0} = v^2$$

are dimensiunea unei viteze la pătrat. Rezultă astfel **viteza undelor longitudinale în solide** :

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{formula lui Newton}) \quad (2.2.14)$$

2.2.4. Propagarea undelor longitudinale în fluide

Fie un cilindru de fluid cu secțiunea S în direcția de propagare a unei longitudinale (de exemplu o undă sonoră), analog barei din paragraful precedent (fig. 2.2.4). Presupunem că S nu se schimbă în prezența unei deoarece fluidul este închis într-un tub rigid. Considerăm că ρ_0 este densitatea fluidului în absența unei și ρ densitatea actuală (variabilă).

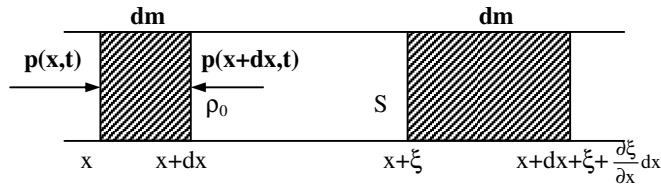


Fig. 2.2.4

Elementul de masă dm de fluid este :

$$dm = \rho_0 S dx = \rho S \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right)$$

de unde rezultă

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} = \frac{\rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)}{1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

variația relativă a densității fiind :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_o} = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Pentru undele obișnuite $\frac{\Delta \rho}{\rho_o} \ll 1$ (ne restrângem doar la aproximația liniară).

Variațiile de densitate dau naștere la variații corespunzătoare de presiune. Astfel, în absența undei $p_o = p(\rho_o)$ iar în prezența undei $p = p(\rho)$ și:

$$\Delta p = p - p_o = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_o (\rho - \rho_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_o (\rho - \rho_o)^2 + \dots$$

sau

$$\Delta p \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_o \Delta \rho$$

Deoarece oscilațiile sonore se efectuează foarte repede și conductivitatea termică a fluidelor este mică (față de cea a solidelor), căldura nu are timp să treacă de la un element al mediului la altul în timpul comprimărilor și rarefierilor și de aceea trebuie să presupunem că propagarea sunetului este un proces *adiabatic*, adică, în timpul propagării sunetului nu se face schimb de căldură între diferitele porțiuni ale mediului supuse comprimărilor și rarefierilor. Deci

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \Delta \rho = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \rho_o \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

și

$$dF = \Delta p \cdot S = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot S = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Înlocuind

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \rho_o \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{și} \quad dm = \rho_o S dx$$

rezultă:

$$\rho_o S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S dx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \rho_o \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_{fl}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

de unde

$$v_{fl} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad}}$$

Viteza undelor în fluide v_{fl} se poate exprima cu ajutorul *modulului de compresibilitate* K definit de relația:

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V}.$$

Ținând cont că

$$\rho = m/V$$

se poate exprima :

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \left(-\frac{m}{V^2} \right)$$

și astfel K devine:

$$K = \frac{m}{V} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

deci pentru un proces adiabatic

$$K_{ad} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad}$$

Viteza undelor longitudinale în fluide va fi:

$$v_{fl} = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}}.$$

În cazul propagării undelor longitudinale în **gaze ideale** K_{ad} se calculează folosind ecuația lui Poisson pentru transformarea adiabatică, $pV^\gamma = \text{const.}$ (unde γ este exponentul adiabatic), care prin logaritmare și diferențiere devine:

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const.} \Rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

de unde :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad} = -\gamma \frac{p}{V} \Rightarrow K_{ad} = \gamma p$$

și astfel, pentru un gaz cu masa molară μ și temperatura absolută T :

$$v_g = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$$

sau, în funcție de temperatura θ (în ^0C):

$$v_g = v_0 \sqrt{1 + \alpha \theta}$$

unde v_0 este viteza undelor în condiții normale de presiune și temperatură iar α este coeficientul de dilatație a gazelor.

2.2.5. Propagarea undelor transversale în solide

O undă elastică transversală se obține, în anumite condiții, numai în medii solide. Considerăm că undele transversale se propagă într-o bară elastică. Forța rezultantă asupra elementului de masă dm din bară (fig. 2.2.5) este transversală pe direcția de propagare, fiind dată de diferența tensiunilor elastice tangențiale,

$$d\tau = \tau(x + dx, t) - \tau(x, t) = \tau(x, t) + \frac{\partial \tau(x, t)}{\partial x} dx - \tau(x, t),$$

datorită alunecării straturilor (forfecării):

$$dF = \left[\tau(x, t) + \frac{\partial \tau(x, t)}{\partial x} dx - \tau(x, t) \right] dS = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx dS \quad (2.2.15)$$

Dar, conform legii lui Hooke pentru deformația de forfecare, tensiunea tangențială este proporțională cu deformația unghiulară γ , constanta de proporționalitate fiind modulul de torsiune (forfecare) G :

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.2.16)$$

unde s-a înlocuit unghiul γ în radiani în funcție de deformația transversală a stratului, η :

$$\gamma \approx \text{tg} \gamma = \frac{d\eta}{dx}.$$

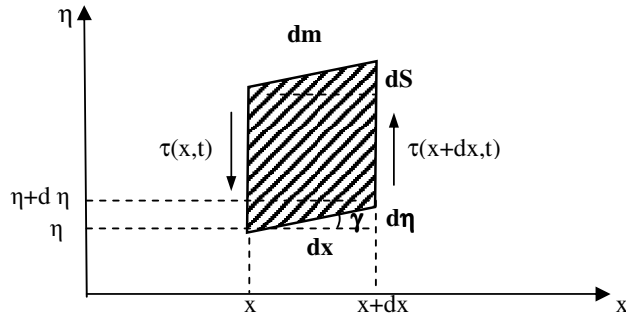


Fig. 2.2.5

Astfel, ținând cont de (2.2.16), expresia forței rezultante (2.2.15) devine :

$$dF = G \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx \cdot dS$$

și egalând dF cu :

$$dF = dm \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \rho dx \cdot dS \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

rezultă :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.2.17)$$

care reprezintă *ecuația de propagare a undelor transversale în bară* și care se mai scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = v_t^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

unde :

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.2.18)$$

reprezintă *viteza undelor transversale în bară*.

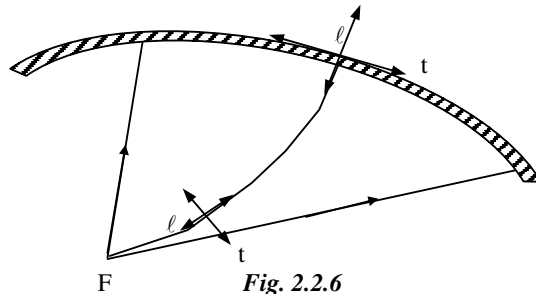


Fig. 2.2.6

Deoarece $G < E$, viteza undelor transversale este mai mică decât cea a undelor longitudinale pentru același mediu solid ($G \approx 0,4 E$ pentru metale și rezultă că $v_t \approx 0,62 \cdot v_\ell$). Inegalitatea se păstrează și în cazul propagării undelor în medii nemărginite (de exemplu scoarța

terestră) și această deosebire sensibilă în vitezele de propagare ale celor două tipuri de unde este folosită în seismologie pentru determinarea poziției epicentrului cutremurelor (fig. 2.2.6). La suprafața pământului întâi sosește unda longitudinală “ ℓ ” care apare ca o vibrație (trepidație) a podelei apoi, după un anumit timp (de ordinul secundelor), sosește unda transversală “ t ” care apare ca o vibrație sau oscilație orizontală (legănare).

2.2.6. Ecuația coardei vibrante

Vom considera o coardă elastică (un fir a cărui secțiune este mică pentru ca rezistența lui la încovoiere să fie foarte redusă, fixat la capete și supus unei tensiuni), așezată în starea neperturbată, dar tensionată, de-a lungul axei Ox ; astfel problema va fi tratată în cazul simplu unidimensional.

Un element de coardă de lungime dx este scos din poziția de echilibru de către o forță dirijată pe direcția Oy , perpendicular pe axa Ox (fig. 2.2.7).

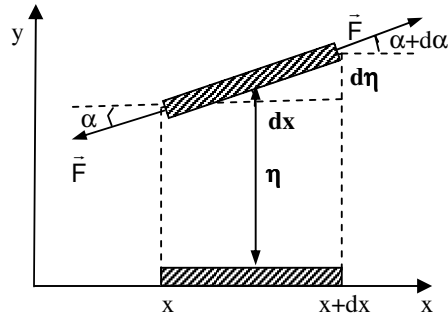


Fig. 2.2.7

Atunci centrul de masă al acestui element este deplasat cu η față de poziția de echilibru. Lăsat liber, elementul de coardă va reveni spre poziția de echilibru, executând oscilații transversale, deci deplasarea η depinde de timp. Dar perturbația acestui element din coardă se propagă de-a lungul lui x , antrenând și restul corzii; rezultă de aici că $\eta = \eta(x, t)$.

Asupra elementului considerat acționează forțele F , care fac unghiurile α și $\alpha + d\alpha$ cu axa Ox . Mișcarea corzii efectuându-se în planul xOy , se proiectează forțele pe aceste axe. Componenta pe axa Ox a celor două forțe este :

$$F_x = F [\cos(\alpha + d\alpha) - \cos \alpha] \quad (2.2.19)$$

După dezvoltarea în serie a funcției cosinus ținând seama că unghiurile α și $\alpha + d\alpha$ au valori foarte mici, se obține :

$$F_x = 0$$

Rezultatul era de așteptat, întrucât coarda, acționată inițial de o forță pe direcția Oy , nu se deplasează și pe direcția Ox .

Componenta pe direcția Oy este:

$$F_y = F [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha] \quad (2.2.20)$$

și înlocuind

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x$$

și

$$\sin(\alpha + d\alpha) \approx \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x dx + \dots$$

rezultă din (2.2.20):

$$F_y = F \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx \quad (2.2.21)$$

Dacă se exprimă forța F_y în funcție de tensiunea tangențială τ și aria A a secțiunii corzii se obține:

$$F_y = \tau A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx$$

Pe de altă parte, forța F_y produce mișcarea accelerată a elementului de coardă :

$$dF_y = dm \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \rho A dx \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

și din cele două expresii ale forței F_y obținem **ecuația undei transversale unidimensionale în coardă**:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{v_t^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.2.22)$$

cu notația :

$$\frac{\tau}{\rho} = v_t^2 \quad (2.2.23)$$

unde

$$v_t = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (2.2.24)$$

este **viteza de propagare a undelor transversale prin coardă**.

Dacă în relația (2.2.21) nu se înlocuiește tensiunea F din coardă, se obține din egalitatea componentelor F_y :

$$dm \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = F \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

de unde rezultă

$$v_t^2 = \frac{F}{\left(\frac{dm}{dx}\right)} = \frac{F}{\mu}$$

sau

$$v_t = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.2.24')$$

unde $\mu = \frac{dm}{dx}$ este **masa unității de lungime a coardei**.

2.2.7. Ecuația undelor într-un mediu ideal

2.2.7.1. Ecuația diferențială a undelor

Ne propunem să găsim o ecuație de propagare a undelor în următoarele condiții:

- mediul este *ideal* adică omogen, izotrop, liniar, nedispersiv și conservativ;
- izvorul de unde produce mici oscilații (perturbații) în jurul poziției de echilibru.

Indiferent de natura perturbației, sau de caracterul matematic al mărimii perturbate exprimată prin funcția de undă ψ (notată cu ξ în cazul undelor longitudinale și cu η în cazul

celor transversale), care variază în raport cu coordonatele spațiale și cu timpul, propagarea perturbației se poate descrie cu o aceeași teorie matematică. În consecință, în acest paragraf, ne vom ocupa numai de propagarea perturbației, fără a specifica natura acesteia. Mediul fiind ideal, diversele unde se comportă la fel și deci ecuația de propagare are aceeași formă (2.2.3 – 2.2.6). Generalizarea datelor experimentale conduce la postularea următorului tip de ecuație diferențială :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.25)$$

în care v este o constantă cu dimensiunile unei viteze, a cărei valoare depinde de caracteristicile mediului și ale unde.

Utilizând operatorul laplacean Δ (relația A.1.33, anexa A1), ecuația undelor capătă forma condensată :

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.26)$$

sau, notând cu

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.2.27)$$

operatorul lui d' Alembert, rezultă ecuația:

$$\square \psi = 0 \quad (2.2.28)$$

Ulterior se va vedea că, în medii ideale, pentru diferite tipuri particulare de unde elastice sau electromagnetice, prin analiza propagării perturbației date, se obțin ecuații de forma (2.2.25), care permit totodată și stabilirea dependenței vitezei v de proprietățile mediului.

2.2.7.2. Unda plană

Ne propunem să integrăm ecuația diferențială (2.2.25) în cazul în care funcția ψ are aceeași valoare în oricare punct al unui plan (y, z) . Atunci :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.29)$$

În teoria ecuațiilor cu derivate parțiale se arată că o soluție generală a ecuației (2.2.29) este o funcție arbitrară care depinde de x și t numai prin intermediul unei combinații liniare și omogene a acestor variabile. Astfel, soluția generală este :

$$\psi = f\left(\frac{x}{v} - t\right) + g\left(\frac{x}{v} + t\right) \quad (2.2.30)$$

sau

$$\psi = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (2.2.30')$$

în care f și g sau F și G sunt două funcții arbitrare. Soluția $f\left(\frac{x}{v} - t\right)$ din (2.2.30) reprezintă *unda progresivă*, care se propagă de la sursa S a unde (fig. 2.2.8) spre punctul de observație. Într-adevăr, pentru acele valori ale variabilelor x și t care satisfac relația :

$$\frac{x}{v} - t = \text{const.} \quad (2.2.31)$$

funcția ψ are o aceeași valoare. În particular, la momentul $t = 0$, în punctul $x = x_0$ notăm $f\left(\frac{x_0}{v}\right) = f_0$. La momentele ulterioare, $t > 0$, valoarea f_0 a funcției va fi regăsită numai în acele puncte care satisfac condiția (2.2.31):

$$\frac{x}{v} - t = \frac{x_0}{v} = \text{const.}$$

sau

$$f\left(\frac{x}{v} - t\right) = f\left(\frac{x_0}{v}\right) = f_0$$

deci pentru puncte a căror coordonată este $x > x_0$.

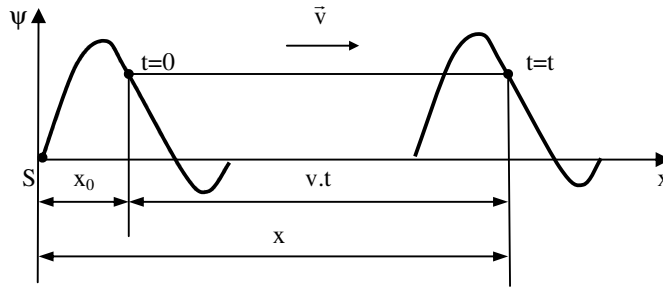


Fig. 2.2.8

De aici rezultă următoarele :

1° perturbăția se propagă de la sursă în sensul pozitiv al axei Ox, ceea ce justifică denumirea de *undă progresivă*;

2° raportul $\frac{x - x_0}{v}$ reprezintă timpul necesar ca unda să străbată distanța $x - x_0$ și, prin urmare,

3° constanta v reprezintă viteza de propagare a perturbăției. În acest paragraf se va preciza semnificația vitezei v ca *viteză de fază*.

Soluția $g\left(\frac{x}{v} + t\right)$ din (2.2.30) reprezintă *unda regresivă*; un raționament analog cu acela

făcut mai sus arată că pentru valori crescătoare ale timpului, coordonata x trebuie să scadă, o anumită valoare a funcției propagându-se de la punctul de observație spre sursă, în sensul negativ al axei Ox.

Cazul cel mai des întâlnit în practică fiind acela al undelor progresive, din expresia (2.2.30) vom reține numai soluția particulară $f\left(\frac{x}{v} - t\right)$. În ceea ce privește forma acestei funcții,

ne limităm deocamdată la *unda armonică*. Dacă perturbăția din sursă variază cu timpul ca un oscilator armonic și dacă mediul este ideal, atunci funcția care verifică ecuația (2.2.29) și care reprezintă *unda armonică plană*, poate fi de forma:

$$f_c = A \cos \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) + \varphi_0 \right] \quad (2.2.32)$$

sau, dacă se pornește de la expresia (2.2.30'):

$$f_c = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \quad (2.2.33)$$

în care A , ω și φ_0 sunt constante. De asemenea, soluția :

$$f_s = A \sin \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) + \varphi_0 \right] \quad (2.2.34)$$

reprezintă o undă armonică plană. După cum se știe, orice combinație liniară a soluțiilor particulare este o soluție a ecuației diferențiale liniare (2.2.29). Luând suma:

$$\psi = f_c + i f_s$$

se obține funcția :

$$\psi = A e^{i \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) + \varphi_0 \right]} \quad (2.2.35)$$

sau

$$\psi = A e^{i \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]} \quad (2.2.36)$$

care reprezintă unda armonică plană; pentru comoditatea calculelor preferăm forma (2.2.35) sau (2.2.36), în locul formulelor (2.2.32) și (2.2.34), care modelează fenomenele reale.

Mărimile caracteristice undeii armonice plane sunt:

1°. *Faza undeii*, definită ca argumentul cosinusului din expresia (2.2.32), este o funcție de cele două variabile, x și t :

$$\varphi(x, t) = \omega \left(\frac{x}{v} - t \right) + \varphi_0 \quad (2.2.37)$$

2°. *Faza inițială* φ_0 , care, așa cum arată numele, este :

$$\varphi_0 = \varphi(0, 0) \quad (2.2.38)$$

3°. *Suprafața de undă*, sau suprafața *echifază*, este suprafața pe care faza are aceeași valoare la un moment dat. Evident, datorită faptului că de la început s-a pus condiția ca funcția ψ să nu depindă de y și z , suprafața de undă a undeii armonice plane nu poate fi decât un plan, perpendicular pe direcția Ox . Notăm cu $\vec{I}_x$ versorul direcției de deplasare a planelor echifază, iar cu x distanța de la un plan origine la planul care conține punctul de observație.

4°. *Viteza de fază*, prin care se înțelege viteza cu care se deplasează suprafața de undă pe direcția normalei la suprafața de undă.

Fie o suprafață de undă caracterizată de o anumită valoare a fazei (2.2.37),

$$\varphi(x, t) = \text{const.}$$

Diferențiind această expresie se obține :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (2.2.39)$$

de unde rezultă semnificația constantei v ca *viteză de fază*. Se observă că planele echifază se deplasează în sensul valorilor crescătoare ale lui x .

5°. *Frecvența unghiulară* ω , sau *pulsatia*, mărime constantă care exprimă viteza de variație a fazei :

$$\omega = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.2.40)$$

6°. *Vectorul de undă* $\vec{k}$, al cărui modul este definit astfel :

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} \quad (2.2.41)$$

deci k este *numărul de undă* (2.2.2). Întrucât versorul $\vec{I}_x$ este normal la planele echifază, vectorul

$$\vec{k} = k \cdot \vec{I}_k = \frac{\omega}{v} \vec{I}_k = \frac{\omega}{v} \vec{I}_x \quad (2.2.42)$$

are aceeași direcție și același sens cu direcția și sensul de propagare a suprafețelor de undă.

7°. *Intensitatea undei* luată prin definiție ca produsul dintre expresia complex conjugată ψ^* a funcției ψ și funcția însăși :

$$I = \psi^* \psi \quad (2.2.43)$$

sau, ținând seama de expresia (2.2.35) :

$$I = A^2 \quad (2.2.44)$$

8°. Amplitudinea undei poate fi obținută din relațiile (2.2.43) și (2.2.44):

$$A = (\psi^* \psi)^{1/2} \quad (2.2.45)$$

Această mărime reprezintă valoarea maximă a funcției din (2.2.32) și (2.2.34).

Mărimile 7° și 8° definite mai sus sunt constante în cazul undei armonice plane, care se propagă într-un mediu ideal. Dacă însă mediul nu este ideal, sau forma suprafeței de undă nu este un plan, aceste mărimi nu mai rămân constante.

Utilizând expresia vectorului de undă (2.2.42), funcția de undă dată de (2.2.36) se scrie :

$$\psi = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)} \quad (2.2.46)$$

iar partea ei reală este :

$$\text{Re } \psi = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)$$

Observăm că o undă armonică plană reprezintă un concept idealizat, deoarece nici o sursă reală nu poate fi uniform distribuită într-un plan și deci infinită. În subparagraful următor se arată în ce caz o undă sferică poate fi aproximată printr-o undă plană.

Dacă trecem la un sistem de coordonate carteziene (x, y, z) , orientate arbitrar față de care direcția de propagare are cosinusurile directoare $\cos \alpha$, $\cos \beta$ și $\cos \gamma$, întrucât :

$$r = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

și

$$k r = x k \cos \alpha + y k \cos \beta + z k \cos \gamma$$

observând că

$$k \cos \alpha = k_x ; k \cos \beta = k_y ; k \cos \gamma = k_z,$$

obținem relația precedentă ca un produs scalar :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = x k_x + y k_y + z k_z.$$

Atunci soluția ecuației (2.2.25), în cazul unei unde armonice plane este :

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)} \quad (2.2.47)$$

2.2.7.3. Unda sferică.

Vom căuta soluția ecuației undelor produse de o sursă *punctiformă* situată într-un mediu ideal; în acest caz suprafețele de undă sunt sfere, iar unda se numește sferică. Datorită simetriei sferice este comod să se exprime funcția ψ și operatorul laplacean (A.1.38) în coordonatele sferice (r, θ, ϕ) , a căror legătură cu coordonatele carteziene (fig. 2.2 9) este:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

ecuația undelor (2.2.26) scriindu-se explicit:

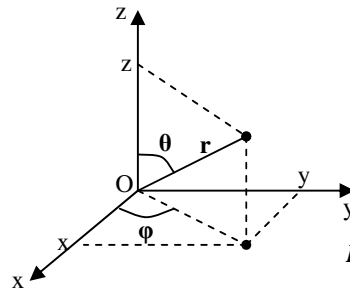


Fig. 2.2.9

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.49)$$

Se observă însă, că luând originea O în sursă ($r = 0$), funcția de undă nu mai depinde de variabilele θ și φ , trecerea de la o sferă la alta făcându-se numai prin varierea lui r sau t . Astfel, ecuația (2.2.49) se reduce la :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.50)$$

Deoarece:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} (r \psi)$$

ecuația (2.2.50) devine :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) = \frac{r}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.51)$$

Notând $r \psi = u$ se obține o ecuație formal identică cu (2.2.29),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.52)$$

a cărei soluție este de forma (2.2.30') :

$$u = F\left(t - \frac{r}{v}\right) + G\left(t + \frac{r}{v}\right), \quad r \in (0, \infty)$$

de unde:

$$\psi = \frac{1}{r} \left[F\left(t - \frac{r}{v}\right) + G\left(t + \frac{r}{v}\right) \right] \quad (2.2.53)$$

semnificația funcțiilor F și G fiind aceeași ca în subparagraful precedent.

Limitându-ne la o undă armonică *progresivă*, soluția (2.2.53) se scrie:

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \varphi_0 \right]} = \frac{A}{r} e^{i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)}$$

Vectorii $\vec{r}$ și $\vec{k}$ sunt coliniari în fiecare punct, deoarece originea este în sursă. Notând amplitudinea unei sferice $A / r = \mathcal{A}(r)$, se constată că aceasta depinde de distanța dintre punctul M în care se observă perturbația produsă de undă și punctul O în care este plasată sursa undei. Dacă distanța r este mult mai mare decât dimensiunile domeniului D din jurul punctului M (fig. 2.2.10) atunci raportul $1/r$ poate fi considerat constant, ceea ce conduce la o valoare constantă a amplitudinii $\mathcal{A}$. Depinzând deci de raportul dintre distanța r și dimensiunile domeniului de observație, o undă sferică poate fi aproximată printr-una plană.

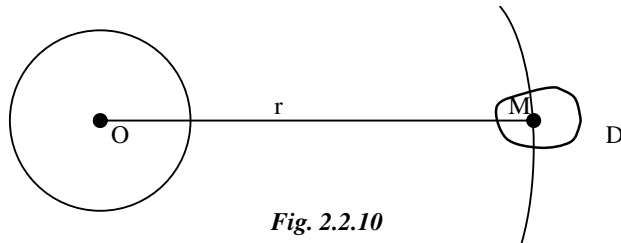


Fig. 2.2.10

2.2.8. Interferența undelor elastice. Unde staționare

Fenomenul de suprapunere a două sau mai multe unde într-un punct al unui mediu elastic se numește **interferență**. Pentru studiul acestui fenomen se utilizează *metoda compunerii micilor oscilații*, care constă în faptul că mișcarea punctului material în care are loc interferența este dată de rezultanta mișcărilor de mică amplitudine impuse acestui punct de fiecare undă în parte (principiul independenței acțiunii forțelor).

Pentru ca două unde se interfere trebuie să fie *coerente* adică diferența de fază să se mențină constantă în timp și să aibă aceeași frecvență.

Considerăm două unde elastice coerente care provin de la două surse coerente aflate la distanțele x_1 și x_2 de punctul P din mediul elastic (fig. 2.2.11).

Presupunem că elongațiile celor două unde sunt pe aceeași direcție și că au aceeași amplitudine (A_0) și pulsație:

$$y_1 = A_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

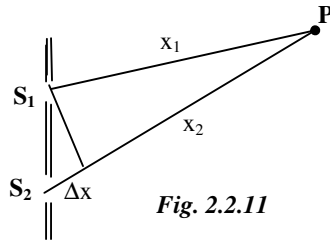


Fig. 2.2.11

Din compunerea acțiunii undelor rezultă:

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0 \cos \frac{2\pi}{2} \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{x_2}{\lambda} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{2} \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} + \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

$$y = 2A_0 \cos \pi \left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda} \right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right)$$

$$y = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0 \right) \quad (2.2.54)$$

unde

$$A = 2A_0 \cos \frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \quad (2.2.55)$$

și

$$\varphi_0 = 2\pi \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} = \pi \frac{x_1 + x_2}{\lambda}$$

sunt *amplitudinea* și respectiv *faza inițială a mișcării oscilatorii rezultante*.

Din (2.2.55) rezultă că amplitudinea mișcării rezultante este funcție de diferența de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ dintre cele două unde.

Amplitudinea rezultantă va avea valoarea *maximă* când:

$$\cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2n \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 2n \frac{\lambda}{2}$$

și va avea valoarea *minimă* când:

$$\cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Punctele cu amplitudine maximă se numesc *ventre* și le corespunde o diferență de drum egală cu un număr par de $\frac{\lambda}{2}$ în timp ce punctele de amplitudine minimă se numesc *noduri* și le corespunde o diferență de drum egală cu un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$.

Fenomenul de interferență este frumos ilustrat de undele de suprafață care se formează pe apă la aruncarea simultană a două pietricele, la o anumită distanță între ele.

Un caz interesant de interferență se obține prin *suprapunerea unei incidente cu unda reflectată pe aceeași direcție*. Cele două unde au aceeași frecvență (la reflexie nu se modifică frecvența) și diferența de fază (de drum) rămâne constantă în timp deci sunt coerente.

Presupunem că reflexia se face pe un mediu cu densitate mai mare decât a celui în care are loc propagarea. Notăm cu Ox direcția unde incidente și cu AB suprafața reflectantă, situată la distanța ℓ de sursa de unde (fig. 2.2.12 a).

Izvorul de oscilații O oscilează după legea :

$$y_O = A_o \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

În punctul M, situat la distanța x de izvor, oscilația este de forma:

$$y_1 = A_o \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Oscilațiile ajungând în N se reflectă și ajungând în M au elongația :

$$y_2 = A_o \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2\ell - x}{\lambda} \right) - \varphi \right]$$

unde φ este întârzierea de fază produsă în urma reflexiei; pentru simplificare s-a considerat aceeași amplitudine a unei reflectate cu a unei incidente, deși amplitudinea scade în urma reflexiei deoarece o parte din energia unde se pierde prin transmisie. Se observă că diferența de drum dintre cele două unde nu depinde de timp ci numai de poziția punctului considerat.

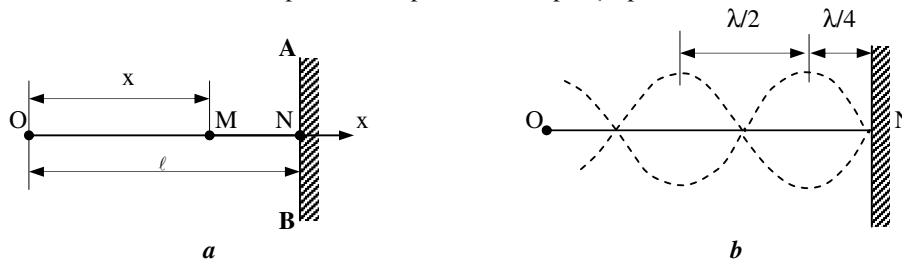


Fig. 2.2.12

Oscilația rezultantă în M are ecuația :

$$y = y_1 + y_2 = 2A_o \cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right) - \frac{\varphi}{2} \right]$$

sau

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right) - \frac{\varphi}{2} \right]$$

și are drept caracteristică *separarea fazei* $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = (\omega t - kx)$ de la unda incidentă progresivă

y_1 într-un factor sinusoidal spațial și unul sinusoidal temporal.

Amplitudinea mișcării este:

$$A = 2A_o \cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

și nu depinde de timp.

Fiecare particulă oscilează armonic, conform factorului temporal $\cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right) - \frac{\Phi}{2} \right]$ dar cu amplitudinea A variabilă de la punct la punct, conform factorului spațial $\cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\Phi}{2} \right)$, spre deosebire de unda progresivă (plană, neatenuată) în care particulele oscilează cu aceeași amplitudine.

Cum punctul fix N are amplitudinea nulă ($A = 0$), punând $x = \ell$ în expresia precedentă pentru A, rezultă $\Phi = \pi$ și astfel:

$$A = 2 A_0 \cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.2.56)$$

Pentru a obține poziția ventrelor se pune condiția:

$$A = \text{maxim} \Rightarrow \cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = 2n\pi \Rightarrow x_{M,n} = \ell - (2n-1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pentru $n=1 \Rightarrow x_{M,1} = \ell - \frac{\lambda}{4}$ deci primul ventru se află la $\lambda/4$ în stânga punctului N (fig. 2.2.12b).

Pentru *noduri* se pune condiția:

$$A = 0 \Rightarrow \cos \left(2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$2\pi \frac{\ell - x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\ell - x}{\lambda} = \frac{n}{2} \Rightarrow x_{m,n} = \ell - n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Primul nod se obține pentru $n = 0$, adică $x_{m,0} = \ell$, deci în punctul N.

Așadar, ca urmare a interferenței undei incidente cu unda reflectată ia naștere o nouă undă, formată din ventre și noduri, numită **undă staționară**.

2.2.9. Mărimi energetice

Intensitatea undei elastice (numită și densitate de suprafață a fluxului energetic Φ) definită prin :

$$I = \frac{d\Phi}{dA_n} = \frac{d}{dA_n} \left(\frac{dW}{dt} \right) \quad (2.2.57)$$

exprimă transferul de energie în procesul de propagare a undei prin aria dA_n normală la direcția de transfer a energiei W. Energia transferată de unda care se propagă cu viteza v, în timpul dt, normal prin aria dA_n este uniform distribuită în volumul paralelipipedului cu secțiunea dA_n și înălțimea v.dt, fiind deci proporțională cu volumul acestuia (fig. 2.2.13):

$$dW \sim dA_n \cdot v \cdot dt$$

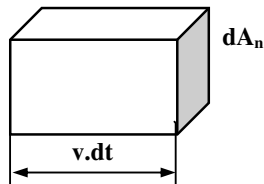


Fig. 2.2.13

Factorul de proporționalitate reprezintă energia din unitatea de volum, adică *densitatea volumică de energie*, w . Astfel:

$$dW = w \cdot dA_n \cdot v \cdot dt$$

și din (2.2.57) rezultă:

$$I = w \cdot v \quad (2.2.58)$$

Viteza de fază fiind un vector și intensitatea unei elastice poate fi definită ca vector, indicând sensul transferului de energie :

$$\vec{I} = w \vec{v} \quad (2.2.58')$$

Un element de volum dV , cu masa dm , din mediul elastic străbătut de undă, execută o oscilație și în consecință are o energie suplimentară :

$$dW = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} dm \cdot \xi_o^2 \cdot \omega^2$$

sau, în funcție de densitatea mediului ρ :

$$dW = \frac{1}{2} \xi_o^2 \omega^2 \rho dV$$

unde ξ_o reprezintă amplitudinea, iar ω frecvența unghiulară. Raportând la unitatea de volum dV se obține densitatea de energie w :

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \xi_o^2 \omega^2 \rho \quad (2.2.59)$$

Introducând w în (2.2.58) rezultă pentru intensitatea undei:

$$I = \frac{1}{2} \xi_o^2 \omega^2 \rho v \quad (2.2.60)$$

sau, în funcție de frecvență:

$$I = 2\pi^2 \xi_o^2 v^2 \rho v \quad (2.2.61)$$

2.2.10. Ultraacustică

1. Generarea ultrasunetelor

Ultrasunetele sunt unde acustice cu frecvența mai mare decât pragul audibilității normale umane (16 KHz), ajungând până la frecvențe de ordinul 10 GHz (10^{10} Hz).

Ultrasunetele se obțin fie cu ajutorul unor cristale *piezoelectrice* care manifestă fenomenul de **electrostricțiune** adică de contracție sau dilatare sub acțiunea unui câmp electric, fie cu ajutorul unor corpuri *feromagnetice* care manifestă fenomenul de **magnetostricțiune**, deformându-se sub acțiunea unui câmp magnetic.

a) În primul caz prin aplicarea unei tensiuni alternative, materialul vibrează, putând genera în acest mod unde acustice în mediul înconjurător. Astfel de cristale piezoelectrice sunt : cuarțul, turmalina, titanatul de bariu, sarea Seignette etc, însă cel mai folosit este cuarțul deoarece prezintă stabilitate termică și o relație liniară între tensiunea aplicată și deformație.

Din cuarț se taie o plăcuță (lamă) cu o anumită orientare față de axele cristalografice. Grosimea lamei, ℓ , se alege astfel încât să vibreze în rezonanță cu câmpul electric alternativ aplicat prin intermediul unui condensator. Condiția de maxim sau de formare a undelor staționare este ca grosimea lamei să fie număr întreg de semilungimi de undă:

$$\ell = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{v}{2\nu}$$

unde v este viteza de propagare a undelor longitudinale (ultrasunetelor), dată de relația (2.2.14).

Rezultă astfel frecvența ultrasunetelor generate:

$$\nu_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = n \nu_1$$

unde E este modulul de elasticitate Young, ρ densitatea cuarțului iar ν_1 ($n=1$) este frecvența fundamentală (fig. 2.2.14). Având în vedere valorile pentru E și ρ la cuarț rezultă:

$$\nu_1 = \frac{2855}{\ell} \text{ (kHz)}, \text{ unde } \ell = \text{mm}$$

Aceeași lamă se poate folosi și ca receptor de ultrasunete datorită efectului invers: intrând în vibrație de rezonanță sub acțiunea unei ultrasunore, lama se polarizează alternativ, adică pe fețele sale apar sarcini electrice alternative.



Fig 2.2.14

b) În al doilea caz se poate realiza un generator de ultrasunete dintr-o bară cu proprietăți magnetostrictive, introdusă într-o bobină alimentată de la o sursă de curent alternativ și care, sub influența câmpului magnetic alternativ creat de bobină, se dilată și se contractă periodic, deci capetele barei oscilează și aceste oscilații sunt transmise mediului sub formă de ultrasunete.

2. Aplicații ale ultrasunetelor

Aplicațiile ultrasunetelor (u.s.) pot fi *active* și *pasive*.

În cazul aplicațiilor *active* u.s. schimbă atât structura cât și proprietățile mediului supus acțiunii lor. Aceste aplicații se bazează pe un transfer de energie de la unda ultrasonoră la substanța care suferă transformări structurale. Astfel, ultrasunetele sunt folosite pentru degazarea și omogenizarea topiturilor, prelucrarea materialelor solide (șlefuire, tăiere, perforare), schimbarea structurii metalelor, lipirea și cositorirea ultrasonică, curățarea suprafețelor metalice sau îmbunătățirea depunerilor electrochimice. De asemenea ultrasunetele pot distruge suspensii (de exemplu separarea și depunerea picăturilor de apă din ceață) sau pot produce emulsii de substanțe nemiscibile. Dacă transferul de energie se realizează la nivel molecular, ultrasunetele pot iniția reacții chimice sau provoca scindarea unor molecule.

Aplicațiile *pasive* servesc numai la obținerea de informații referitoare la calitatea sau la dimensiunile corpului examinat, u.s. nemodificând structura și proprietățile corpului. Aceste aplicații se bazează pe absorbția diferențială a ultrasunetelor în diverse medii (mai puternică în gaze) astfel încât variația intensității unui fascicul la trecerea printr-o substanță poate da indicații asupra existenței eventualelor neomogenități. Aceasta este baza procedurii experimentale denumită *defectoscopie ultrasonoră*, procedeu care evidențiază defectele (goluri, fisuri) din piesele solide. De asemenea, se pot măsura grosimi de piese care nu prezintă decât o față accesibilă sau distanțe dintre două puncte. *Hidrolocația ultrasonoră* constă în reflexia ultrasunetelor de către o suprafață solidă dintr-un mediu lichid, cu receptarea ulterioară a ecoului și este utilizată pentru detectarea și poziționarea unor obiecte situate în apă (submarine, bancuri de pești, forme ale reliefului submarin etc); același principiu stă la baza *ecografiei* folosite în investigațiile medicale. Proprietatea ultrasunetelor de a se propaga cu ușurință prin medii solide și de a se reflecta atunci când ajung la suprafața de separare a două straturi de compoziții diferite a fost folosită pentru a pune la punct o metodă de *prospecțiune geologică*.

PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 2

2.1. Să se arate că mișcarea rectilinie definită de ecuația $x = 5 - 2\cos^2 t$ (cm) este o mișcare oscilatorie armonică. De asemenea să se determine centrul de oscilație (punctul față de care au loc oscilațiile), perioada, amplitudinea și accelerația mișcării.

$$\mathbf{R:} \quad x - 4 = -\cos 2t = \cos(2t + \pi); \quad T = \pi \text{ (s)}; \quad A = 1 \text{ cm}; \quad v = 2\sin 2t; \quad a = 4\cos 2t$$

2.2. Să se determine elementele mișcării oscilatorii armonice definită de ecuația $x = 1 + \cos 9,42 t + \sin 9,42 t$ (cm).

$$\mathbf{R:} \quad x = 1 + \sqrt{2} \sin\left(9,42 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

2.3. Prin compunerea a două oscilații armonice de aceeași direcție și de aceeași frecvență se obține o oscilație rezultantă cu amplitudinea de 9 cm. Una din oscilații este descrisă de ecuația $x_1 = 5 \sin 40t$ cm, iar cealaltă are amplitudinea de 7 cm. Să se determine ecuația celei de-a doua oscilații și a mișcării oscilatorii rezultante.

$$\text{Se dau: } \arccos 0,1 = 1,47 \text{ rad} = 0,468\pi \text{ și } \arctg 1,22 = 0,89 \text{ rad} = 0,282\pi.$$

$$\mathbf{R:} \quad x_2 = 7 \sin(40t + 0,468\pi); \quad x = 9 \sin(40t + 0,282\pi)$$

2.4. Oscilația rezultată prin superpoziția a două oscilații armonice cu aceeași amplitudine este data de ecuația $x = a \cdot \cos 2,1t \cdot \cos 50t$ (unde t este dat în secunde). Să se determine pulsațiile oscilațiilor componente și perioada bătailor.

$$\mathbf{R:} \quad \omega_1 = 52,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ și } \omega_2 = 47,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad T_b = 1,5 \text{ s}$$

2.5. Ecuațiile de mișcare la care este supus un punct sunt $x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}$; $y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}$ oscilațiile efectuându-se după direcții perpendiculare. Să se afle:

- a) ecuația traiectoriei punctului;
- b) viteza punctului și sensul deplasării punctului pe traiectorie.

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } x^2 + y^2 = 100 \text{ (cerc de rază } r = 10 \text{ cm)}; \quad \text{b) } v = 4\pi \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \text{ sens trigonometric.}$$

2.6. Aflați ecuația traiectoriei mobilului supus simultan oscilațiilor perpendiculare:

$$\text{a) } x = 2 \sin \pi t; \quad y = \cos \pi(t + 0,5);$$

$$\text{b) } x = 2 \cos \omega t; \quad y = 3 \sin 0,5 \omega t.$$

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } y = -\frac{1}{2}x \text{ (dreaptă)}; \quad \text{b) } y^2 = \frac{9}{4}(2 - x) \text{ (parabolă).}$$

2.7. O masă $m = 150\text{g}$, suspendată la capătul unui resort de constantă elastică $k = 50\text{N/m}$, efectuează oscilații verticale amortizate. Știind că după $n = 15$ oscilații, amplitudinea oscilațiilor scade de $e = 2,71$ ori, să se afle: a) decrementul logaritm al amortizării; b) perioada oscilațiilor amortizate și coeficientul de amortizare β .

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } \delta = \frac{1}{n} \ln(A_0/A_n) = 1/15; \quad \text{b) } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} = 0,344 \text{ s}; \quad \beta = \frac{\delta}{T} = 0,194 \text{ s}^{-1}$$

2.8. O particulă este scoasă din poziția de echilibru cu o distanță A_0 și apoi lăsată liberă. Ce spațiu parcurge particula în timpul oscilațiilor până la oprirea sa completă dacă decrementul logaritm al amortizării este δ ?

$$\mathbf{R:} \quad s = A_0 \frac{1 + e^{-\frac{\delta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\delta}{2}}}$$

2.9. Amplitudinea oscilațiilor forțate ale unui oscilator asupra căruia acționează o forță exterioară periodică, variază cu pulsația acesteia însă are valori egale pentru două pulsații ω_1 și ω_2 . Să se determine pulsația ω_r pentru care amplitudinea prezintă un maxim (numită și pulsație de rezonanță a elongațiilor).

$$\mathbf{R:} \quad \omega_r = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$$

2.10. Un corp cu masa $m=10$ g efectuează oscilații cu coeficientul de amortizare $\beta=1,6$ s⁻¹. Corpul este acționat de o forță periodică externă care îi produce oscilații forțate a căror ecuație este $x=5 \cos(10\pi t - 5/4\pi)$ cm. Să se găsească ecuația forței periodice exterioare.

$$\mathbf{R:} \quad F = 0,05\sqrt{2} \cos 10\pi t \text{ (N)}$$

2.11. Două surse de oscilații S_1 și S_2 emit unde cu amplitudinile $A_1 = 2$ mm și respectiv $A_2 = 5$ mm. Frecvența undelor emise este $\nu = 160$ Hz iar viteza lor de propagare în aer este $c = 320$ m.s⁻¹. Să se afle ecuația de oscilație a unui punct situat la distanța $x_1 = 6,5$ m de prima sursă și $x_2 = \frac{32}{3}$ m de a doua sursă, dacă sursele oscilează în fază.

$$\mathbf{R:} \quad y = 6,8 \sin(320\pi t - 1,19) \text{ (m)}$$

2.12. Extremitatea unei coarde elastice oscilează după legea

$$y = 0,02 \sin 10\pi t \text{ (m)}.$$

- Aflați frecvența și perioada oscilațiilor extremității.
- Calculați lungimea de undă a undelor ce se propagă în lungul coardei dacă viteza lor de propagare este $c = 0,4$ m.s⁻¹.
- Ce diferență de fază corespunde oscilațiilor a două puncte de pe coardă aflate la distanța $\Delta x = 5$ cm unul de celălalt ?
- Care este legea de oscilație a unui punct situat la distanța $x_1 = 1,2$ m de extremitate? Se va presupune coarda infinită ?
- Ce viteză are punctul situat la distanța x_1 după o optime de perioadă, socotit din momentul în care a început să oscileze ?

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } \nu = 5 \text{ Hz; } T = 0,2 \text{ s; b) } \lambda = 8 \text{ cm; c) } \Delta\varphi = k\Delta x = \frac{5\pi}{4};$$

$$\text{d) } y_1 = 0,02 \sin 10\pi(t - 3) \text{ (m); e) } v_1 = A\omega \cos \omega t_1 = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$$

2.13. O undă longitudinală are frecvența $\nu = 1000$ Hz. Unda se propagă într-un mediu de densitate $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ și al cărui modul de elasticitate este $E = 2,12 \cdot 10^{11}$ N.m⁻². Să se afle:

- pulsația undei și lungimea ei de undă;
- energia maximă de oscilație a unității de volum a mediului, dacă amplitudinea oscilațiilor este $A = 1$ mm.

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } \omega = 2000\pi \text{ rads}^{-1}; \lambda = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,2 \text{ m; b) } W = \frac{1}{2V} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 1,54 \cdot 10^5 \text{ J}$$

2.14. La distanța $l=4$ m de un perete reflectător plan vertical se află o sursă de unde plane de amplitudine $A_1=1,2$ mm. La distanța L de perete se află un receptor ce primește atât undele provenite direct de la sursă cât și undele reflectate cu amplitudinea $A_2=0,15$ mm. Să se determine primele trei frecvențe ale sursei pentru care în receptor se produc minime de oscilație în urma interferenței celor două unde precum și amplitudinea minimă. Viteza sunetului în aer se consideră $c=340$ m/s.

$$\mathbf{R:} \quad \nu_n = n \frac{c}{2l}; \nu_1 = 42,5 \text{ Hz; } \nu_2 = 2\nu_1 = 85 \text{ Hz; } \nu_3 = 3\nu_1 = 127,5 \text{ Hz; } A_{\min} = A_1 - A_2 = 0,05 \text{ mm}$$

CAPITOLUL 3

ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM

Experimental se constată existența unor interacțiuni de altă natură decât cele gravitaționale, care nu pot fi reduse la aspecte strict mecanice. Acestea au primit numele de *interacțiuni electromagnetice*, iar câmpul prin care se transmit, *câmp electromagnetic*. Se observă că în anumite cazuri particulare efectele electrice sunt independente de cele magnetice, câmpul electric și câmpul magnetic manifestându-se ca entități distincte, nelegate între ele.

Analiza câmpului electromagnetic și a fenomenelor conexe necesită introducerea unor mărimi de stare adecvate (*primitive și derivate*). Macroscopic se definesc două mărimi primitive care descriu câmpul electromagnetic (*intensitatea câmpului electric în vid și inducția magnetică în vid*) și patru mărimi primitive caracteristice stării electromagnetice a corpurilor (*sarcina electrică, momentul electric, intensitatea curentului electric, momentul magnetic*).

Pentru studiul electromagnetismului este comodă distincția următoarelor trei cazuri, determinate de condiții diferite:

- **regimul static**, când nu există efecte termice și toate mărimile X sunt invariante în timp ($\partial X / \partial t = 0$);
- **regimul staționar**, când mărimile sunt invariante în timp;
- **regimul variabil**, când nu există nici o condiție restrictivă.

3.1. ELECTROSTATICĂ

Electrostatica se referă la interacțiunile dintre sarcinile electrice în repaus și poate fi studiată separat de *magnetostatică*, care se referă la curenții staționari; în ambele cazuri, mărimile fizice nu depind de timp.

3.1.1. Sarcina electrică

Sarcina electrică, notată q sau Q , reprezintă o mărime *primitivă*, ireductibilă la alte mărimi și care este evidențiată de interacțiunile care se exercită între corpurile încărcate electric (corpuri electrizate), interacțiuni care sunt de alt gen decât cele cunoscute din mecanică. Faptul că forțele dintre corpurile electrizate pot fi de atracție sau de repulsie, indică existența a două tipuri de sarcini electrice, numite convențional *pozitive* și *negative*. De asemenea experimental se pune în evidență proprietatea de *aditivitate* a sarcinii electrice.

Un corp poate fi electrizat prin diverse procedee, cum ar fi: frecarea, încălzirea, iradierea cu radiații ionizante, iradierea cu unde electromagnetice cu lungime de undă mică, contactul cu alt corp electrizat, influența exercitată de alt corp electrizat.

Un corp electrizat cu dimensiuni neglijabile față de distanțele la care se găsesc corpurile cu care interacționează poate fi considerat punctiform, iar sarcina sa este o *sarcină punctiformă*.

Starea de încărcare a corpurilor *nepunctiforme*, poate fi descrisă prin mărimea derivată ρ , numită *densitatea volumică de sarcină electrică* și definită prin relația :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (3.1.1)$$

unde dq reprezintă sarcina electrică elementară din volumul elementar dV . Evident, în cazul unei repartiții *omogene* a sarcinii electrice q , ρ poate fi calculat prin raportarea la un volum finit V :

$$\rho = \frac{q}{V} \quad (3.1.1')$$

Pentru cazul, frecvent întâlnit în practică, al distribuției sarcinii electrice numai pe suprafața corpului se introduce noțiunea de *densitate superficială de sarcină*, σ :

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad (3.1.2)$$

dq reprezentând sarcina electrică de pe suprafața elementară dA . În cazul unei repartiții *uniforme* a sarcinii electrice q pe o suprafață, σ poate fi calculat prin raportarea la o suprafață finită A :

$$\sigma = \frac{q}{A} \quad (3.1.2')$$

Analog se poate defini o *densitate liniară de sarcină*, λ :

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad (3.1.3)$$

$d\ell$ fiind elementul de lungime pe care este repartizată sarcina elementară dq .

O sarcină electrică generată într-un punct al unui corp nu se menține în acel punct ci se răspândește în jur astfel încât densitatea volumică de sarcină se micșorează în timp (sarcina se relaxează). Scăderea densității volumice de sarcină, $-dp$, depinde de valoarea lui p la un moment dat și de intervalul de timp dt :

$$-dp = k p dt$$

unde inversul constantei k reprezintă *timpul de relaxare* T ($T = 1/k$). Prin integrarea relației de mai sus (la $t = 0$, $p = p_0$) se obține:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{1}{T} \int_0^t dt \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

Din punct de vedere al mobilității sarcinilor electrice în corpuri, acestea pot fi clasificate în două categorii:

- corpuri *conducătoare (conductori)*, în care sarcinile electrice se deplasează ușor (timp de relaxare $T=0$ deci $p=0$ și sarcina este împrăștiată instantaneu) și
- corpuri *neconducătoare (izolatoare)* sau *dielectrici*, în care mobilitatea sarcinilor electrice este foarte redusă (timp de relaxare foarte mare $T \rightarrow \infty$ deci $p=p_0$ și sarcina se conservă un timp îndelungat).

3.1.2. Câmpul electric. Intensitatea câmpului electric în vid

Existența interacțiunilor între corpuri electrizate, în repaus, fără contact între ele, presupune existența unui câmp prin care se transmit interacțiunile, numit **câmp electric (electrostatic)**. Caracteristicile acestuia pot fi evidențiate prin acțiunile sale ponderomotoare și anume forțele pe care le exercită asupra unui corp încărcat.

Evident, *intensitatea câmpului electric în vid* este o mărime *primitivă*, deoarece a fost introdusă în mod experimental, fără a fi dedusă din alte mărimi și fără a se reduce la alte mărimi. Pe baza experiențelor lui Cavendish, Coulomb a arătat că forța electrostatică dintre două sarcini punctiforme în repaus, q și q_0 , situate în vid la distanța r una față de cealaltă (fig. 3.1.1 a) este dată de expresia:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (3.1.4)$$

care reprezintă **legea lui Coulomb** și în care $\vec{r}$ este vectorul de poziție al sarcinii q_0 față de q (fig. 3.1.1.b) iar mărimea ϵ_0 este *constanta interacțiunilor electrostatice în vid* sau *permitivitatea electrică a vidului* a cărei valoare este $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m (sau $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ m/F).

Se spune că sarcina q creează în jurul ei un *câmp electric* ce acționează asupra unei alte sarcini q_0 (de probă) cu forța (3.1.4). Deoarece forța electrostatică este proporțională cu sarcina, se introduce mărimea $\vec{E}(\vec{r})$, numită *intensitatea câmpului electric* sau *câmp electric* și definită prin forța ce acționează asupra unității de sarcină:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.1.5)$$



Fig. 3.1.1.

Câmpul electric creat de un *sistem de sarcini discrete* $q_1, q_2, \dots, q_n$ într-un punct M în care este plasată sarcina de probă q_0 , având vectorii de poziție $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ față de punctele în care se află sarcinile respective, este

$$\vec{E}_M = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{E}_i}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (3.1.6)$$

deci egal cu suma vectorială a câmpurilor electrice generate de fiecare sarcină în parte (*principiul superpoziției câmpurilor electrice*):

$$\vec{E}_M = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \text{unde} \quad \vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q_0} \quad (3.1.6')$$

În cazul unei *distribuții continue* de sarcină (într-un volum V , pe o suprafață S sau de-a lungul unei curbe C), pentru calculul câmpului electric se realizează o împărțire în elemente diferențiale de volum, de suprafață sau de linie (fig. 3.1.2) pe care le putem considera ca sarcini punctiforme dq (date de relațiile 3.1.1 – 3.1.3) care produc la distanța r câmpuri electrice elementare

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.1.7)$$

câmpul electric total fiind dat de superpoziția acestor câmpuri electrice elementare:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_V \frac{\rho \vec{r} dV}{r^3} + \iint_S \frac{\sigma \vec{r} dS}{r^3} + \int_{(C)} \frac{\lambda \vec{r} d\ell}{r^3} \right] \quad (3.1.7')$$

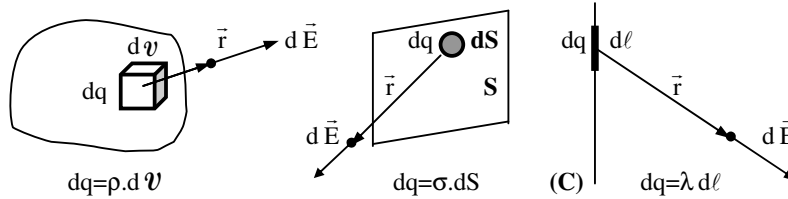


Fig. 3.1.2

3.1.3. Fluxul electric. Legea lui Gauss în vid.

Câmpul electric poate fi reprezentat cu ajutorul *liniilor de câmp* care sunt simple curbe ale căror tangente, în orice punct, coincid cu direcția vectorului câmp electric în acel punct. Totalitatea liniilor de câmp electric ce trec *normal* printr-o suprafață constituie *fluxul electric* Φ care se definește ca produsul scalar dintre vectorul câmp electric $\vec{E}$ și vectorul suprafață orientată $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$, care are sensul normalei *pozitive* la acea suprafață având versorul $\vec{n}$ (fig. 3.1.3):

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} S = E S \cos \theta = E S_n \quad (3.1.8)$$

În cazul în care câmpul electric este *neuniform* ($\vec{E} \neq \text{const.}$) se definește mai întâi un flux electric elementar prin elementul de suprafață $d\vec{S}$ care este considerată practic plană iar vectorul câmp electric ce străbate această suprafață este constant,

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (3.1.9)$$

și apoi, prin integrare, se determină fluxul total prin suprafața S :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot dS \cdot \cos \theta \quad (3.1.10)$$

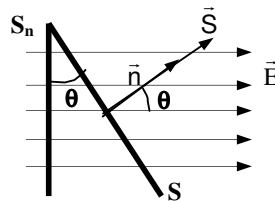


Fig. 3.1.3

Legea lui Gauss reprezintă o relație simplă dintre fluxul electric care străbate o suprafață *închisă* și sarcina electrică (sursa) care îl produce.

Se consideră în vid suprafața închisă S (fig.3.1.4) în *interiorul* căreia se află o sarcină electrică Q , într-un punct oarecare P . Cu centrul în P se construiește o sferă de rază r . Se observă că toate liniile de câmp ce pleacă de la sarcina Q vor străbate atât suprafața S_0 a sferei cât și suprafața S . Prin urmare, fluxul electric prin S este egal cu fluxul electric prin S_0 și pe baza relației (3.1.10) se poate scrie :

$$\Phi_S = \Phi_{S_0} = \iint_{S_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_{S_0} dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} S_0 \quad (3.1.11)$$

și cum

$$S_0 = 4\pi r^2,$$

se poate scrie:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.1.12)$$

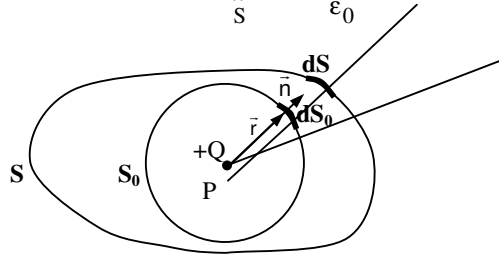


Fig. 3.1.4

Rezultatul obținut nu depinde de raza sferei folosite în raționament deoarece numărul total al liniilor de câmp (fluxul electric) care trec prin suprafețele tuturor sferelor concentrice este constant. Cu alte cuvinte, în afara punctului în care se află sarcina nu pot să apară sau să se termine

linii de câmp. Sarcina Q este sursa câmpului electric. Rezultă că fluxul electric care străbate suprafața închisă S ce cuprinde sarcina Q este dat de relația (3.1.12).

În conformitate cu principiul superpoziției, intensitatea rezultantă a unui câmp generat de mai multe sarcini Q_i se obține prin însumarea câmpurilor generate de fiecare sarcină în parte și deci, dacă în interiorul suprafeței S există mai multe sarcini Q_i , se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_S (\vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \vec{E}_n \cdot d\vec{S}) \\ \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.1.13)\end{aligned}$$

Deoarece sarcina Q poate fi pozitivă sau negativă și fluxului Φ i se asociază un semn. Prin convenție, sensul liniilor de câmp este dat de sensul de mișcare al unei sarcini electrice pozitive lăsate să se miște liber în câmpul respectiv. Liniile câmpului electrostatic sunt curbe deschise care pleacă de la sarcina pozitivă și se opresc pe sarcina negativă (fig. 3.1.5 a, b, c).

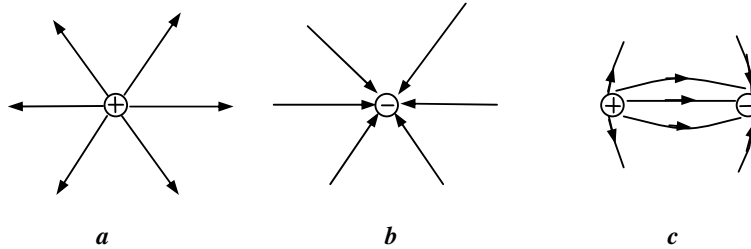


Fig. 3.1.5

Din figurile 3.1.5. a, b și din relația (3.1.10) se observă că semnul fluxului depinde de sensul liniilor de câmp și deci, de semnul sarcinii electrice din interiorul suprafeței: o sarcină pozitivă ($Q > 0$) creează un flux pozitiv, $\Phi > 0$ (fig. 3.1.6 a), iar o sarcină negativă ($Q < 0$) creează un flux negativ prin S , $\Phi < 0$ (fig. 3.1.6 b).

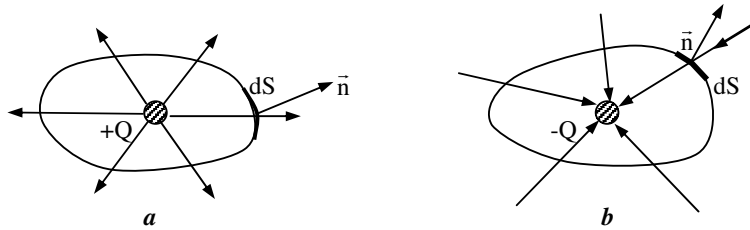


Fig. 3.1.6

Cu alte cuvinte, fluxul elementar $d\Phi$ prin suprafața elementară deschisă dS (fig. 3.1.6) este pozitiv dacă sensul liniilor de câmp este același cu al vectorului $d\vec{S}$ (care are sensul normalei exterioare la suprafață, de versor $\vec{n}$) și negativ dacă sensul liniilor de câmp este contrar sensului vectorului $d\vec{S}$.

Pentru a determina fluxul electric printr-o suprafață S , creat de o sarcină Q situată într-un punct P exterior (fig. 3.1.7), se construiește un con elementar cu vârful în P , care decupează pe suprafața S două elemente de suprafață dS și dS' . Deoarece în interiorul lui S nu sunt sarcini electrice, rezultă că toate liniile de câmp din P vor străbate atât dS cât și dS' deci fluxul electric prin dS este egal, în valoare absolută, cu fluxul prin dS' . Dar fluxul $d\Phi$ este negativ, deoarece el străbate suprafața dS în sens contrar normalei $\vec{n}$ și deci

$$d\Phi = -d\Phi',$$

sau

$$d\Phi + d\Phi' = 0 \quad (3.1.14)$$

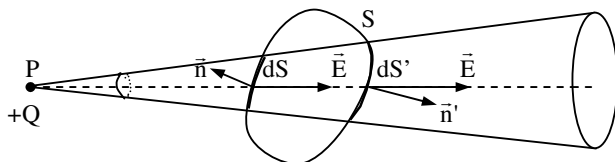


Fig. 3.1.7

Întreaga suprafață S se poate considera ca fiind alcătuită din perechi de elemente de suprafață dS și dS' construite ca în figura 3.1.7. Prin fiecare pereche de suprafețe elementare fluxul rezultat elementar este nul, în conformitate cu relația (3.1.14). Însușind toate aceste fluxuri elementare se obține:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.1.15)$$

adică *fluxul total printr-o suprafață închisă este nul dacă sarcina care produce câmpul se află în exteriorul suprafeței*.

Relațiile (3.1.12) și (3.1.15) exprimă **legea fluxului electric** sau **legea lui Gauss sub formă integrală**: “fluxul electric printr-o suprafață închisă de formă arbitrară este numeric egal cu $1/\epsilon_0$ înmulțit cu suma algebrică Q a sarcinilor electrice aflate în interiorul suprafeței și este egal cu zero când Q este exterior acestei suprafețe”.

Dacă sarcina Q este distribuită în spațiu într-un volum $\mathcal{V}$, conform (3.1.1) se poate scrie:

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

În conformitate cu **teorema Green-Gauss-Ostrogradski** (A.1.20) fluxul total Φ prin suprafața S ce delimitează volumul V , satisface relația:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \cdot d\mathcal{V}$$

Din cele două relații și din (3.1.12) rezultă:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \cdot d\mathcal{V} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

de unde se obține **forma locală a legii lui Gauss**:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1.16)$$

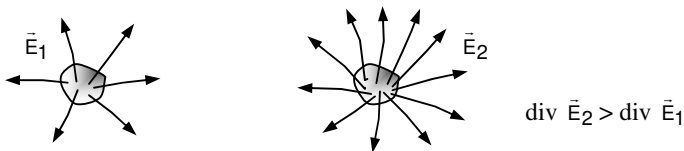


Fig. 3.1.8

Prin urmare, semnificația fizică a divergenței câmpului electric este dată de densitatea volumică a sarcinilor electrice. Divergența este mai mare în punctele în care există o densitate de volum a sarcinilor electrice mai mare și pornesc mai multe linii de câmp din suprafața care închide sarcinile (fig. 3.1.8).

Dacă într-un punct din spațiu $\rho = 0$, din acel punct nu pornesc linii de câmp și $\text{div } \vec{E} = 0$. Se spune în acest caz că *fluxul câmpului electric este conservativ iar câmpul electric este solenoidal* (§ A.1.3). Dacă în alt punct $\rho \neq 0$ ($\rho > 0$) atunci $\text{div } \vec{E} > 0$ și acest punct reprezintă o *sursă de câmp electric*.

3.1.4. Câmpul electric al unor distribuții de sarcină

Pentru câmpuri electrice care prezintă simetrie, legea fluxului conduce la o metodă comodă de calcul a intensității câmpului electric. Să presupunem că există o suprafață închisă Σ pentru care, în orice punct, sunt satisfăcute condițiile:

- a) valoarea intensității câmpului electric este aceeași și
- b) vectorul $\vec{E}$ este normal la suprafață.

Atunci fluxul câmpului electric $\vec{E}$ prin suprafața închisă Σ este:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{\Sigma} E \cdot dA = E \cdot \oint_{\Sigma} dA = E \cdot \Sigma \quad (3.1.17)$$

relație care, împreună cu legea lui Gauss (3.1.12), permite calcularea intensității câmpului electric pentru unele distribuții de sarcină.

1. Câmpul electric produs de o distribuție sferică de sarcină

Să considerăm în vid un corp sferic de rază R (fig.3.1.9), încărcat *superficial* cu densitatea $+\sigma$ constantă, astfel încât sarcina electrică este :

$$Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

Simetria sferică a distribuției sarcinii electrice implică, în exteriorul corpului încărcat, o simetrie radială a câmpului electric, redată prin forma liniilor de câmp din figura 3.1.9. Suprafața Σ care satisface condițiile impuse anterior este evident o sferă (concentrică cu sfera încărcată) de rază r ($r > R$) și atunci din (3.1.17) și (3.1.12) rezultă:

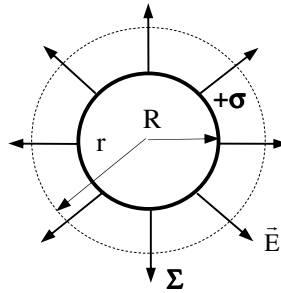


Fig. 3.1.9

$$E_{\text{ext}} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad (3.1.18)$$

sau, vectorial,

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (3.1.18')$$

În interiorul sferei încărcate, oricum s-ar alege suprafața Σ , aceasta nu include nici o sarcină electrică ceea ce, conform (3.1.15), are drept consecință un câmp electric nul:

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0 \quad (3.1.18'')$$

Analog, se poate arăta, că pentru orice distribuție cu simetrie sferică a sarcinii electrice, câmpul electric (în afara corpului încărcat) este identic cu câmpul produs de o sarcină punctiformă, egală cu sarcina totală a corpului și plasată în centrul acestuia.

2. Câmpul electric produs de un plan infinit încărcat

În cazul unei sarcini electrice distribuite cu densitatea superficială constantă $+\sigma$ pe un plan infinit aflat în vid considerente elementare de simetrie conduc la concluzia că liniile de câmp electric sunt normale la planul încărcat, paralele și echidistante (fig. 3.1.10). În această situație se consideră suprafața Σ de forma unui cilindru drept, cu bazele (de arie A) paralele cu planul încărcat, astfel încât fluxul prin suprafața laterală este nul. Atunci, notând cu Q sarcina electrică de pe porțiunea de arie A din planul încărcat, intersectată de cilindrul Σ , în conformitate cu (3.1.17) și (3.1.12) avem :

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{baze}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2S_{\text{bază}}} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0 \cdot 2A}$$

adică

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.1.19)$$

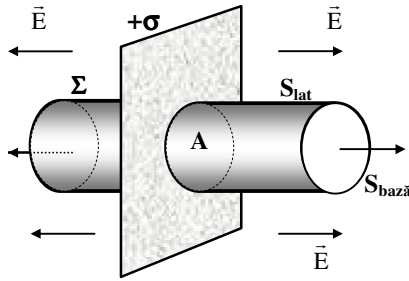


Fig. 3.1.10

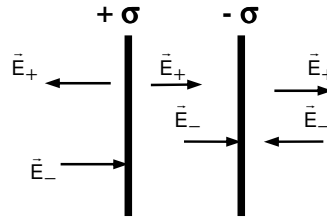


Fig. 3.1.11

3. Câmpul electric creat de două plane infinite încărcate

Considerăm două plane infinite încărcate cu densitățile superficiale de sarcină $+\sigma$ și $-\sigma$ (fig. 3.1.11). În spațiul dintre cele două plane intensitățile (3.1.19) câmpurilor electrice create de fiecare plan în parte se însumează, vectorii $\vec{E}_+$ și $\vec{E}_-$ fiind orientați în același sens:

$$E_{\text{int}} = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.1.20)$$

iar în domeniul exterior $\vec{E}_{\text{rez}} = 0$.

3.1.5. Potențialul electric

Expresia (3.1.5) a câmpului electric creat de o sarcină punctiformă în vid se poate scrie și sub forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.1.21)$$

unde

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z; \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z$$

și

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = -\frac{1}{2} \frac{2x \cdot \vec{i}_x + 2y \cdot \vec{i}_y + 2z \cdot \vec{i}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Notând

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.1.21')$$

funcția scalară numită *potențial electric (electrostatic)*, relația (3.1.21) devine:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r}) \quad (3.1.22)$$

sau

$$\vec{E} = -\text{grad } (V + \text{const.}) \quad (3.1.22')$$

deoarece gradientul unei constante este nul. Rezultă că potențialul câmpului electric poate fi definit numai cu aproximația unei constante aditive arbitrare.

Astfel, câmpul electric derivă dintr-un potențial scalar; semnul minus arată că sensul câmpului este contrar vectorului gradient de potențial, deci o sarcină pozitivă se deplasează în sensul descreșterii potențialului.

Ca și în cazul intensității câmpului electric, potențialul depinde de tipul distribuției de sarcini. Pentru un sistem de sarcini *discrete* și sarcini *distribuite continuu* (pe un volum $\mathcal{V}$, pe o suprafață S și pe o curbă Γ) potențialul este:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_i \frac{q_i}{r_i} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho d\mathcal{V}}{r} + \iint_S \frac{\sigma dS}{r} + \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r} \right]$$

Din relația (3.1.22) rezultă componentele intensității câmpului electric creat de sarcina q :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.1.23)$$

iar produsul scalar dintre vectorul $\vec{E}$ și vectorul $d\vec{\ell}$ - elementul de contur pe o traiectorie oarecare - este (fig. 3.1.12):

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E d\ell \cos \alpha = E dr = \vec{E} d\vec{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{i}_z \right) (dx \vec{i}_x + dy \vec{i}_y + dz \vec{i}_z)$$

sau

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV \quad (3.1.24)$$

Integrând între două puncte 1 și 2 se obține:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 \quad (3.1.25)$$

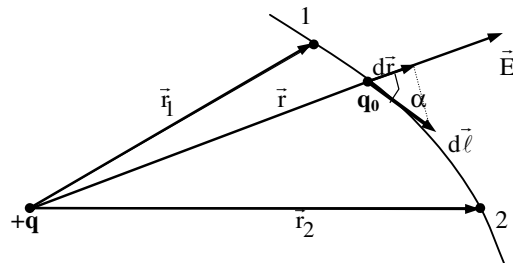


Fig. 3.1.12

Prin definiție, circulația vectorului câmp electric între două puncte, $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, reprezintă *tensiunea electrică* între acele puncte. Deci într-un câmp electric cu caracter potențial (câmp electrostatic) tensiunea depinde numai de poziția celor două puncte :

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_1 - V_2 \quad (3.1.26)$$

Dacă sarcina electrică de probă q_0 se deplasează pe o curbă închisă Γ vom avea ($V_1 = V_2$):

$$V_1 - V_2 = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (3.1.27)$$

care exprimă **forma integrală a teoremei circulației vectorului câmp electric (teorema potențialului electrostatic)**: “*circulația vectorului câmp electric pe o curbă închisă este egală cu zero*”. Dacă se transformă integrala curbilinie într-o integrală de suprafață (teorema lui Stokes), se obține **forma locală a teoremei potențialului electrostatic**:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.1.28)$$

deci *câmpul electric este irotațional*, fără vârtejuri, având linii de câmp *deschise*. Cu alte cuvinte, câmpul electric derivă dintr-un potențial, fiind un câmp *conservativ*.

Convenție. Într-un punct aflat la infinit, potențialul câmpului electrostatic este egal cu zero. Dacă

$$V_2 = V_{\infty} = 0 \Rightarrow V_1 - V_2 = V_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

deci potențialul electric într-un punct este egal cu circulația vectorului câmp electric din acel punct la infinit.

Lucrul mecanic al forțelor câmpului electrostatic, care este un câmp conservativ, pentru deplasarea unui corp de sarcină pozitivă q_0 între două puncte este egal cu minus variația energiei potențiale între acele puncte, conform relației (1.1.40):

$$\mathcal{L}_{12} = -\Delta W = W_1 - W_2 \quad (3.1.29)$$

Dar

$$\mathcal{L}_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0 (V_1 - V_2) \quad (3.1.30)$$

Din cele două relații rezultă că produsul $q_0 \cdot V$ măsoară energia potențială a sarcinii q_0 în punctul de potențial V . De aici rezultă semnificația fizică a potențialului într-un punct dat al câmpului electric, ca fiind energia potențială a sarcinii pozitive *unitate* plasată în acel punct.

Ținând cont de (3.1.26), din (3.1.29) și (3.1.30) se obține:

$$-\Delta W = q_0 \cdot U_{12} \quad (3.1.31)$$

Din teorema lui Gauss pentru vid (3.1.16) și din definiția (3.1.22) rezultă :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\nabla V \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla(-\nabla V) = -\nabla^2 V = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{sau} \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1.32)$$

care reprezintă **ecuația lui Poisson** și în care

$$\nabla^2 V = \Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

este *laplaceanul* potențialului V .

Ecuția Poisson este o ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru care teoria ecuațiilor diferențiale dă soluția :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho \, dx' \, dy' \, dz'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}}$$

$V(x,y,z)$ reprezintă potențialul câmpului electric într-un punct de coordonate (x, y, z) , produs de sarcina electrică cu distribuția descrisă de ρ din volumul V' (evident, regiunile lipsite de sarcină, cu densitatea $\rho = 0$, nu aduc nici o contribuție la rezultat).

În cazul câmpului produs de un corp punctiform, numitorul integralei devine distanța r de la corp la punctul unde se calculează potențialul iar integrala, efectuată acum doar asupra numărătorului, se reduce la sarcina q a corpului. Considerând nulă constanta (arbitrară) de integrare se obține chiar relația (3.1.21'):

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

și aplicând în această egalitate operatorul gradient rezultă, conform (3.1.22), intensitatea câmpului electric.

Prin definiție (§ A.1.3 din anexa A1), *suprafața echipotențială* este locul geometric al punctelor în care potențialul are aceeași valoare, adică $V(x, y, z) = \text{const.}$ Pentru o suprafață echipotențială relația (3.1.24) devine:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ceea ce implică ortogonalitatea vectorilor $\vec{E}$ și $d\vec{\ell}$. Vectorul $d\vec{\ell}$ fiind conținut în suprafața echipotențială, rezultă că liniile de câmp electric (tangente la $\vec{E}$) sunt normale la suprafețele echipotențiale.

3.1.6. Dipolul electric

Dipolul electric este un ansamblu de două sarcini egale și de semne contrare $(+q, -q)$ situate la o mică distanță ℓ între ele. Dreapta ce unește sarcinile se numește *axa dipolului*. Caracterizăm dipolul prin *momentul electric dipolar*:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\ell} \quad (3.1.33)$$

unde $\vec{\ell}$ este vectorul de poziție al sarcinii pozitive față de cea negativă (fig. 3.1.13).

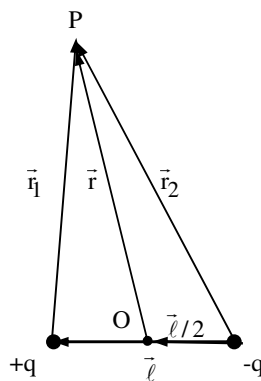


Fig. 3.1.13

3.1.6.1. Câmpul și potențialul electric creat de un dipol

Vom calcula câmpul și potențialul produs de un dipol, caracterizat de un moment electric $\vec{p}$ (fig. 3.1.13) într-un punct P care are vectorul de poziție $\vec{r}$ față de centrul dipolului O (situat în originea sistemului de axe de coordonate) și vectorii de poziție $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ față de cele două sarcini. Se consideră că lungimea dipolului ℓ este mult mai mică decât distanța r la care se calculează acțiunea acestuia.

Potențialul în punctul curent P(x, y, z) este dat, aditiv, de potențialele create de sarcinile punctiforme $+q$ și $-q$, adică :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}$$

Distanța ℓ dintre cele două sarcini punctiforme fiind foarte mică, în comparație cu r_1 și r_2 , se poate scrie, conform figurii 3.1.13:

$$r_1 r_2 \approx r^2; \quad r_1 + r_2 \approx 2r$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{\ell}}{2}; \quad \vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{\ell}}{2}$$

Ridicând la pătrat ultimele două relații și scăzându-le se obține, neglijând termenii cu ℓ^2 :

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2\vec{r} \cdot \vec{\ell} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{2\vec{r} \cdot \vec{\ell}}{r_2 + r_1}$$

Înlocuind această relație în expresia de mai sus a potențialului și ținând cont de aproximațiile făcute, rezultă:

$$V = \frac{q \vec{r} \cdot \vec{\ell}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

unde s-a folosit definiția (3.1.33) pentru momentul electric dipolar.

Conform (3.1.22) intensitatea câmpului electric este:

$$\vec{E} = -\nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \nabla (\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \quad (3.1.34)$$

Dar:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \nabla \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = -\frac{3}{2} \frac{2x \cdot \vec{i}_x + 2y \cdot \vec{i}_y + 2z \cdot \vec{i}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

și

$$\nabla (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \nabla (p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \vec{i}_x + p_y \vec{i}_y + p_z \vec{i}_z = \vec{p}$$

care înlocuite în (3.1.34) determină expresia intensității câmpului electric produs de un dipol:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad (3.1.34')$$

Se observă din această relație că E scade mult mai puternic cu distanța r (ca $1/r^3$), decât în cazul unei sarcini punctiforme (unde dependența este $1/r^2$), deci influența unui dipol în exterior este mai slabă decât a unei sarcini punctiforme.

3.1.6.2. Dipolul electric aflat în câmp electrostatic

Dacă dipolul AB este situat într-un câmp electric *uniform* ($\vec{E} = \text{const.}$) astfel încât momentul dipolar formează unghiul α cu direcția intensității câmpului electric $\vec{E}$ (fig. 3.1.14),

atunci asupra dipolului acționează cuplul de forțe $(+q\vec{E}, -q\vec{E})$ cu momentul față de centrul dipolului:

$$C = F \cdot \ell \sin \alpha = q E \ell \sin \alpha = p E \sin \alpha$$

sau vectorial,

$$\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (3.1.35)$$

Cuplul de forțe tinde să rotească dipolul spre poziția în care momentul său dipolar devine paralel cu intensitatea câmpului. În această poziție atât momentul cuplului de forțe cât și forța electrică rezultantă sunt egale cu zero și dipolul va fi, deci într-o stare de echilibru stabil, așa cum vom vedea în paragraful următor.

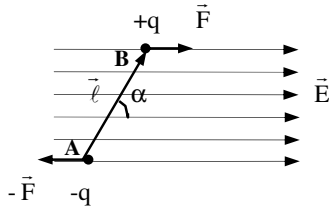


Fig. 3.1.14

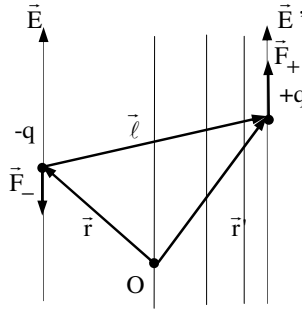


Fig. 3.1.15

Dacă dipolul se află în câmp electric *neuniform* ($\vec{E} \neq \text{const.}$) atunci forțele $\vec{F}_+$ și $\vec{F}_-$ care acționează asupra sarcinilor dipolului nu mai sunt egale în modul și dipolul este acționat în acest caz de rezultanta acestora (fig. 3.1.15):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q [\vec{E}'(\vec{r}') - \vec{E}(\vec{r})] \\ \vec{F} &= q [\vec{E}(\vec{r} + \vec{\ell}) - \vec{E}(\vec{r})] \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

unde $\vec{E}'(\vec{r}')$ este intensitatea câmpului electric în punctul în care se află sarcina electrică pozitivă iar $\vec{E}(\vec{r})$ reprezintă intensitatea câmpului electric în punctul în care se află sarcina electrică negativă.

Cum distanța ℓ dintre sarcinile electrice este mult mai mică decât distanța la care intensitatea câmpului electric $\vec{E}(\vec{r})$ variază sensibil, se poate dezvolta în serie Taylor mărimea $\vec{E}(\vec{r} + \vec{\ell})$ cu limitare la primii termeni:

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{\ell}) = \vec{E}(\vec{r}) + \ell_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \ell_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \ell_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \dots = \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{\ell} \cdot \nabla) \vec{E}$$

unde ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z sunt proiecțiile vectorului $\vec{\ell}$ pe axe de coordonate. Introducând această relație în (3.1.36) și ținând cont de (3.1.33), se obține:

$$\vec{F} = q (\vec{\ell} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

Folosind relația (A.1.28) din anexă,

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A},$$

pentru $\vec{A} = \vec{p}$ și $\vec{B} = \vec{E}$ și ținând cont că $\vec{p}$ este un vector constant ($\text{rot} \vec{p} = 0$) și că $\text{rot} \vec{E} = 0$ (conform teoremei 3.1.28), se poate scrie:

$$\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

deci expresia forței rezultante ce acționează în câmp electric neuniform asupra dipolului electric devine:

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (3.1.37)$$

Astfel, în câmpuri neuniforme, asupra unui dipol electric se exercită atât un cuplu de forțe cât și o *forță de translație* care tinde să plaseze dipolul acolo unde câmpul este mai intens.

3.1.6.3. Energia dipolului în câmp electrostatic

Energia dipolului în câmp electric *uniform* este egală cu suma energiilor celor două sarcini componente aflate în punctele A și B (fig. 3.1.14) de potențiale V_A și V_B :

$$W = W_A + W_B = q V_B - q V_A = q(V_B - V_A) \quad (3.1.38)$$

Dar

$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{d\ell} \vec{l}_\ell = -\frac{\Delta V}{\ell} \vec{l}_\ell = -\frac{V_B - V_A}{\ell} \vec{l}_\ell$$

unde $\vec{l}_\ell$ este versorul direcției axei dipolului. Această relație, proiectată pe axa dipolului, se scrie:

$$E \cdot \cos \alpha = -\frac{V_B - V_A}{\ell} \Rightarrow V_A - V_B = \ell \cdot E \cdot \cos \alpha$$

care înlocuită în (3.1.38) implică pentru energia unui dipol într-un câmp electric:

$$W = -q \ell \cdot E \cos \alpha = -p E \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (3.1.39)$$

Dacă $\alpha = 0$, energia dipolului este minimă, $W_{\min} = -p E$, iar momentul cuplului este zero. Aceasta înseamnă că dipolul se află într-o stare de *echilibru stabil*, deci cuplul de forțe tinde să micșoreze unghiul α dintre axa dipolului și direcția câmpului electric. La $\alpha = \pi$, energia dipolului devine maximă, $W_{\max} = p E$, iar momentul cuplului este zero. Evident, în această poziție, dipolul se află într-o stare de echilibru instabil.

3.1.7. Conductorii în câmp electric

Așa cum s-a văzut în paragraful 3.1.1, corpurile conducătoare (conductorii) se caracterizează printr-o mare mobilitate a sarcinilor electrice (timp de relaxare foarte mic, $T=0$, deci sarcina electrică se împrășteie instantaneu).

În cazul conductorilor metalici există două tipuri de sarcini electrice, de semn contrar: sarcini *libere* (electronii) și sarcini *imobile* (ionii pozitivi aflați în vârfurile rețelei cristaline). Dacă un conductor neutru din punct de vedere electric este introdus într-un câmp electric de intensitate $\vec{E}$, purtătorii de sarcină electrică din interiorul conductorului se deplasează spre suprafața acestuia astfel: sarcinile electrice pozitive în sensul vectorului $\vec{E}$ iar sarcinile electrice negative în sens opus (fig. 3.1.16).

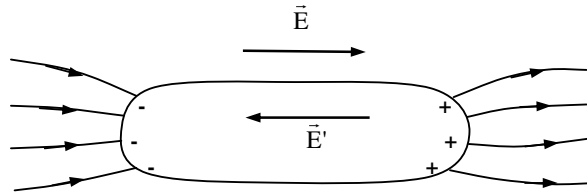


Fig. 3.1.16

Sarcinile electrice de semn contrar generează un câmp electric $\vec{E}'$ orientat în sens opus câmpului electric exterior. Redistribuirea sarcinilor electrice în conductor continuă până când se ajunge la un *echilibru electrostatic*, adică:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}'| \quad \text{și} \quad \vec{E} = -\vec{E}'$$

În acest caz *intensitatea câmpului electric din interiorul conductorului devine zero*:

$$\vec{E}_i = \vec{E} + \vec{E}' = 0 \quad (3.1.40)$$

ceea ce înseamnă că potențialul electric în interiorul conductorului este constant, conform (3.1.22):

$$\text{grad } V_i = 0 \Rightarrow V_i = \text{const.}$$

În exteriorul conductorului liniile de câmp devin perpendiculare pe suprafața conductorului, deci *câmpul electric în exterior are numai componentă normală* (dacă ar avea și o componentă tangențială, sub acțiunea acesteia sarcinile de pe suprafața conductorului s-ar deplasa și nu ar mai exista echilibru electrostatic):

$$\vec{E} = \vec{E}_n ; \quad \vec{E}_t = 0 \quad (3.1.40')$$

Rezultă că suprafața unui conductor aflat în câmp electrostatic este *echipotențială*.

Dacă unui conductor i se transmite o sarcină electrică q , aceasta se distribuie pe suprafața conductorului cu o densitate superficială σ , densitatea volumică ρ din interior fiind zero (de fapt concluzia 3.1.18), deci se distribuie astfel încât să fie îndeplinite condițiile de echilibru (3.1.40) și (3.1.40').

În concluzie, un conductor neutru din punct de vedere electric introdus în câmp electric conduce la întreruperea liniilor de câmp exterior, fapt ce stă la baza *ecranării electrostatice*.

3.1.8. Dielectrici în câmp electric. Polarizarea dielectricilor.

3.1.8.1. Tipuri de dielectrici și de polarizare

Dielectricii sunt substanțe caracterizate din punct de vedere al mobilității sarcinilor electrice printr-un timp de relaxare infinit al sarcinilor. Dielectricii sunt compuși din molecule cu sarcini pozitive și negative care sub acțiunea unui câmp electric, în funcție de tipul acestora, se deplasează microscopic în jurul poziției de echilibru astfel încât *la capetele dielectricului apar sarcini induse*, fenomen care poartă numele de *polarizarea dielectricului*.

Polarizarea dielectricilor este legată de proprietățile atomilor și moleculelor care formează dielectricul respectiv. Se deosebesc două tipuri de polarizare și anume *polarizarea elastică* și *polarizarea de orientare*. Vom încerca să înțelegem aceste două forme de polarizare considerând cazul simplificat, când interacțiunea dintre molecule poate fi neglijată (această presupunere este valabilă, de fapt, numai în cazul unor medii rarefiate, cum sunt gazele).

1°. *Polarizarea elastică*. Pentru o serie de substanțe, moleculele acestora nu posedă moment de dipol electric, adică moleculele constituite ale acestor substanțe sunt *molecule nepolare*. Momentul de dipol al unei molecule este zero dacă centrul sarcinii electrice pozitive coincide cu centrul sarcinii electrice negative. În grupa moleculelor nepolare intră în primul rând toate moleculele monoatomice (gazele inerte, vapori metalici) și moleculele poliatomice care posedă o structură chimică simetrică. În figura 3.1.17 se indică structura unor molecule nepolare. Dacă o moleculă nepolară se află într-un câmp electric de intensitate $\vec{E}$, atunci centrul sarcinilor electrice negative și al celor pozitive se deplasează în sensuri opuse și molecula capătă un moment electric de dipol

$$\vec{p} = q \vec{a} \quad (3.1.41)$$

unde a este distanța dintre centrele sarcinilor electrice negative și pozitive, datorată acțiunii câmpului electric exterior.

Se pot distinge trei tipuri de polarizare elastică :

- polarizarea electronică* – sub acțiunea câmpului electric exterior centrul păturilor electronice se deplasează față de centrul nucleului;
- polarizarea ionică* – în cazul moleculelor formate din ioni (HCl, H₂O etc), sub acțiunea câmpului electric exterior ionii negativi și pozitivi suferă deplasări în sensuri opuse;
- polarizarea rețelei* – în cristalele ionice (exemplu : NaCl) este posibilă, sub acțiunea câmpului electric exterior, o deplasare a subrețelei formată din ionii pozitivi, față de subrețeaua formată din ionii negativi.

Datorită separării centrului sarcinilor pozitive din fiecare moleculă de centrul sarcinilor negative în lungul liniilor de câmp, la capetele dielectricului compus din molecule nepolare apar sarcini induse, egale și de semn contrar (fig. 3.1.17); dielectricul se încarcă cu electricitate pe fețele laterale perpendiculare pe direcția câmpului. Astfel de dielectrici se numesc *dielectrici nepolari* sau *dielectrici*.

2°. **Polarizarea de orientare.** Polarizarea de orientare se observă în cazul substanțelor, ale căror molecule posedă un moment electric de dipol, în absența câmpului electric exterior. Moleculele acestor substanțe se numesc *molecule polare*. Prezența unui moment electric de dipol $\vec{p}_0$ este condiționată de o anumită asimetrie în structura moleculei. Această asimetrie conduce la faptul că centrul sarcinilor negative, din moleculă, nu coincide cu centrul sarcinilor electrice pozitive. Dacă ℓ este distanța dintre centrele sarcinilor electrice negative și pozitive, molecula va avea un moment electric de dipol constant

$$\vec{p}_0 = q \vec{\ell} \quad (3.1.42)$$

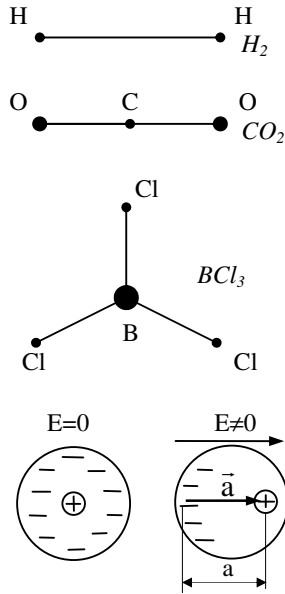


Fig. 3.1.17

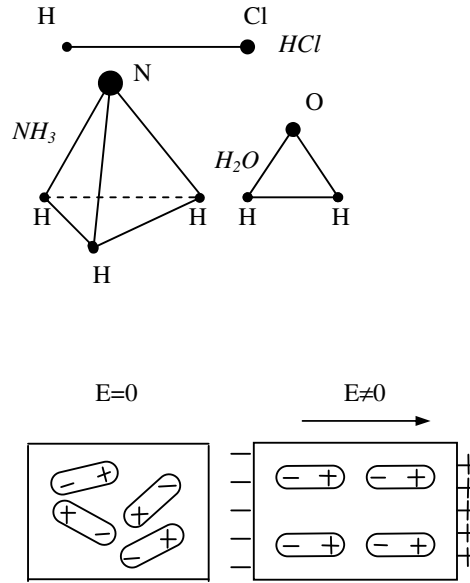


Fig. 3.1.18

În figura 3.1.18 se indică structura unor molecule polare; de exemplu, molecula de apă este polară deoarece sarcina medie pozitivă este deplasată spre atomii de hidrogen iar sarcina negativă spre atomii de oxigen. În substanțele polare nu avem o polarizare macroscopică în absența câmpului electric exterior, deoarece momentele electrice de dipol se distribuie omogen în spațiu. Dacă însă substanța polară se află într-un câmp electric de intensitate $\vec{E}$, atunci distribuția direcțiilor de orientare a momentelor electrice de dipol devine asimetrică, deoarece câmpul exterior tinde să orienteze momentele $\vec{p}_0$ în sensul vectorului $\vec{E}$, conform celor arătate în § 3.1.6 și apar astfel sarcini electrice superficiale (în câmp electric neomogen apar și sarcini induse în volumul dielectricului). Astfel de dielectrics se numesc *dielectrics polari* sau *paraelectrics*.

3.1.8.2. Vectorul polarizare electrică

Așa cum am văzut în subparagraful precedent, orice dielectric, neutru din punct de vedere electric, introdus în câmp electric exterior se polarizează. Starea electrică a unui corp polarizat electric este caracterizată printr-o mărime vectorială $\vec{p}$ numită *momentul electric al corpului* (mărime primitivă), care este univoc definit prin expresiile forței $\vec{F}$ (3.1.37) și cuplului $\vec{C}$ (3.1.35) exercitate de câmpul electric $\vec{E}$, asupra corpului :

$$\vec{F} = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Momentul electric al corpului este dat de suma momentelor electrice dipolare ale celor N molecule polare din care este constituit dielectricul:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

În absența unui câmp electric exterior moleculele dielectricului sunt orientate la întâmplare și suma vectorială a momentelor tuturor moleculelor va fi zero :

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = 0$$

În prezența unui câmp electric exterior uniform, dipolii moleculari se vor roti și $\vec{p} \neq 0$.

Dacă momentul electric al unui element de volum $d\mathcal{V}$ este $d\vec{p}$ atunci corpul poate fi caracterizat din punct de vedere macroscopic prin momentul electric al unității de volum

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\mathcal{V}} = \frac{d\vec{p}}{d\mathcal{V}} \quad (3.1.43)$$

numit și *vector polarizare* sau *polarizație electrică*. Pentru un corp omogen de volum $\mathcal{V}$:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\mathcal{V}} \quad (3.1.43')$$

Vectorul polarizare $\vec{P}$ are ca efect faptul că în prezența unui dielectric intensitatea câmpului electric diferă de intensitatea câmpului electric creat de aceleași sarcini în vid.

Considerăm un mediu dielectric *omogen* de formă paralelipipedică, constituit din molecule *polare*, plasat în vid. Sub acțiunea unui câmp electric omogen $\vec{E}$ moleculele se orientează și pe fața de suprafață S , perpendiculară la direcția câmpului, apare sarcina $+q_p$ iar pe cealaltă $-q_p$, uniform distribuite pe cele două fețe (fig. 3.1.19.a); sarcinile interioare își echilibrează momentele electrice. Dacă dielectricul este așezat în câmp astfel încât fețele paralelipipedului sunt înclinate cu unghiul θ față de direcția vectorului câmp electric, de-a lungul normalei la fața pe care apar sarcinile de polarizare există numai componenta $P_n = \vec{P} \cdot \vec{n}$ a vectorului polarizare $\vec{P}$ (fig. 3.1.19 b).

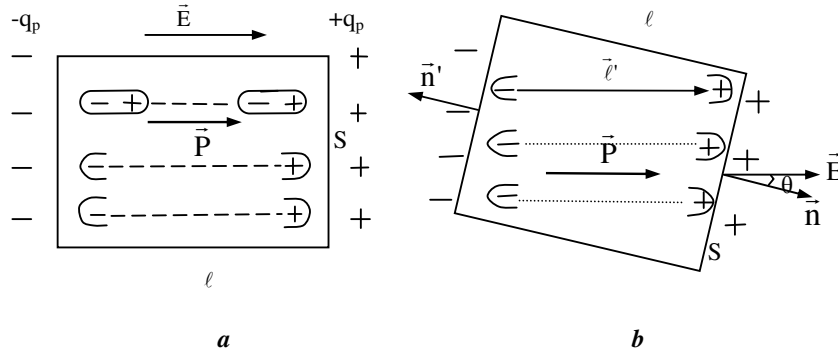


Fig. 3.1.19

Densitatea superficială a sarcinilor de polarizare este

$$\sigma_p = \frac{q_p}{S} \quad (3.1.44)$$

iar momentul electric al corpului dielectric are valoarea:

$$p = q_p \ell' \quad \text{unde} \quad \ell' = \frac{\ell}{\cos \theta}$$

ℓ fiind distanța dintre cele două fețe, vectorul $\vec{p}$ fiind orientat în sensul lui $\vec{E}$:

$$\vec{p} = q_p \cdot \vec{\ell}' = q_p \frac{\ell}{\cos \theta} \vec{1}_E = q_p \frac{\ell}{\cos \theta} \frac{\vec{E}}{E} \quad (3.1.45)$$

Sarcinile interioare își echilibrează momentele și de aceea nu apare densitate volumică de sarcină de polarizare căci, în caz contrar nu ar mai fi respectată condiția de omogenitate.

Polarizarea va fi :

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{q_p \frac{\ell}{\cos \theta}}{S \ell} \frac{\vec{E}}{E} = \frac{\sigma_p}{\cos \theta} \frac{\vec{E}}{E} \quad (3.1.46)$$

Înmulțind relația (3.1.46) cu versorul normalei pozitive la suprafața dielectricului se obține componenta vectorului polarizare pe direcția normalei la fața dielectricului:

$$P_n = \vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_p}{\cos \theta} \frac{\vec{E} \cdot \vec{n}}{E} = \frac{\sigma_p}{\cos \theta} \frac{E \cdot \cos \theta}{E} = \sigma_p \quad (3.1.47)$$

Relația (3.1.47) evidențiază apariția sarcinilor de polarizare pe suprafețele de discontinuitate care nu sunt paralele cu vectorul polarizație electrică. Astfel:

- $\sigma_p > 0$ dacă $\theta \in [0, \pi/2)$, deci pe fața pozitivă;
- $\sigma_p = 0$ dacă $\theta = \pi/2$ deci pe suprafața paralelă cu câmpul;
- $\sigma_p < 0$ dacă $\theta \in (\pi/2, \pi]$, deci pe fața negativă.

În cazul dielectricilor *neomogeni* sau al câmpurilor exterioare neuniforme, la vectorul polarizare contribuie și sarcinile de polarizare de densitate volumică ρ_p (momentele electrice din interiorul dielectricului nu se mai echilibrează) și se poate arăta în acest caz că

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

3.1.9. Capacitatea electrică. Condensatori

Proprietatea corpurilor de a înmagazina sarcini electrice se numește *capacitate electrică*. Dacă se mărește treptat sarcina electrică a unui conductor izolat, potențialul conductorului crește proporțional cu sarcina acumulată pe conductori, astfel încât raportul dintre sarcina q și potențialul V , în orice stare de echilibru a conductorului, rămâne constant. Raportul

$$C = \frac{q}{V}$$

se numește *capacitatea electrică* a conductorului. Valoarea capacității nu depinde de sarcină și potențial ci de forma și dimensiunile conductorului (de geometrie).

Unitatea de măsură a capacității electrice este faradul, F , cu submultipli: μF , nF și pF . Un ansamblu de doi conductori, separați printr-un dielectric poartă numele de *condensator electric*. Cei doi conductori se numesc armăturile condensatorului. După forma armăturilor condensatorii pot fi: plani, sferici, cilindrici etc.

Calculul expresiei capacității condensatorilor se reduce la determinarea sarcinii electrice cu care se încarcă și a diferenței de potențial dintre armături

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \quad (3.1.48)$$

Calculul capacității condensatorului plan

Armăturile condensatorului plan pot fi considerate ca două plane infinite încărcate cu densitățile superficiale de sarcină $+\sigma$ și $-\sigma$ (fig. 3.1.20). Câmpul electric dintre armăturile aflate în aer este creat atât de planul încărcat pozitiv cât și de cel încărcat negativ, așa cum arată relația

(3.1.20) și este orientat perpendicular pe armături, având sensul de la armătura pozitivă spre cea negativă (considerăm această direcție Oz):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.1.49)$$

Conform relației (3.1.22) proiectată pe direcția Oz se obține:

$$E = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow \int_1^2 dV = - \int_{z_1}^{z_2} E \cdot dz$$

sau

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_2 - z_1) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

unde $d = z_2 - z_1$ este distanța dintre armăturile de coordonate z_1 și z_2 .

Dacă S este suprafața unei armături,

$$V_1 - V_2 = \frac{qd}{\epsilon_0 S},$$

q fiind sarcina totală (în valoare absolută) de pe un plan.

Capacitatea condensatorului plan va fi raportul dintre sarcina unei plăci și diferența de potențial dintre plăci:

$$C = \frac{q}{\frac{qd}{\epsilon_0 S}} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.1.50)$$

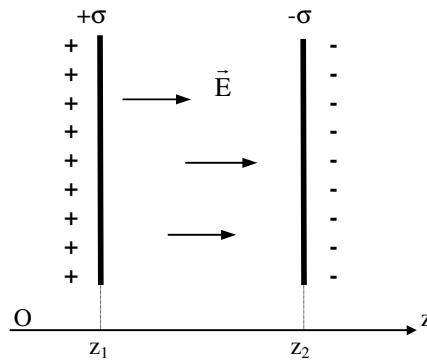


Fig. 3.1.20

3.1.10. Definirea vectorului inducție electrică.

3.1.10.1. Legătura dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ și $\vec{P}$

Considerăm un condensator plan încărcat cu sarcină electrică de densitate superficială σ pe armături (fig. 3.1.21).

În interiorul condensatorului fără dielectric se stabilește câmpul (3.1.49):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.1.51)$$

iar în prezența dielectricului, prin analogie cu relația precedentă:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3.1.52)$$

ϵ fiind *permitivitatea electrică a dielectricului*.

Prin introducerea unui dielectric apare fenomenul de polarizare și pe fețele laterale ale dielectricului, paralele cu armăturile condensatorului, apar sarcini *legate*, de densitate superficială σ_p .

Aceste sarcini vor determina în interiorul dielectricului un câmp $\vec{E}_p$ dirijat în sens contrar câmpului $\vec{E}_0$ produs de sarcinile libere de pe plăcile condensatorului și a cărei valoare este

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (3.1.53)$$

Total se prezintă ca și cum în locul dielectricului s-ar afla în vid două fețe paralele având densitatea superficială de sarcină σ_p .

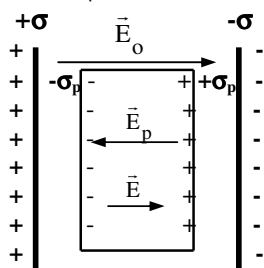


Fig. 3.1.21

Câmpul electric total dintre plăcile condensatorului va fi :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad (3.1.54)$$

având modulul:

$$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$$

de unde rezultă

$$\epsilon_0 E + \sigma_p = \sigma = \epsilon_0 E_0 = \epsilon E \quad (3.1.54')$$

unde s-a ținut seama de relațiile (3.1.51) și (3.1.52).

Deoarece $\sigma_p = P$ (relația 3.1.47) se obține:

$$\epsilon_0 E + P = \sigma \quad (3.1.55)$$

sau

$$D = \sigma \quad (3.1.55')$$

Vectorul

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.1.56)$$

se numește *inducție* (sau *deplasare*) *electrică* și este o mărime derivată. Așa cum rezultă din ultimele două relații, unitatea de măsură pentru inducția electrică este C/m^2 .

Din (3.1.54) și (3.1.56) se obține în prezența unui dielectric:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.1.57)$$

Scriind ϵ sub forma produsului $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, unde ϵ_r este *permitivitatea electrică relativă* a dielectricului, din relația (3.1.56) rezultă valoarea polarizării :

$$P = \epsilon_0 \epsilon_r E - \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E \quad (3.1.58)$$

sau, notând cu

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \quad (3.1.59)$$

susceptivitatea electrică, se obține :

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

sau, vectorial :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.1.60)$$

Mărima χ_e caracterizează mediul din punct de vedere al gradului său de polarizare sub influența câmpului electric.

Din ultima egalitate din (3.1.54') rezultă:

$$E = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

deci mărimea ϵ_r indică de câte ori intensitatea câmpului electric E în dielectrici este mai mică decât intensitatea câmpului electric E_0 în vid.

3.1.10.2. Legea lui Gauss generalizată

Câmpul electric creat în mediul dielectric este considerat a fi rezultatul suprapunerii câmpurilor create în vid de sarcinile *libere* q de pe fețele condensatorului și de sarcinile *legate* q_p de pe fețele dielectricului.

Legea lui Gauss (3.1.12) pentru o suprafață gaussiană Σ ce cuprinde o placă a condensatorului și o față a dielectricului (fig. 3.1.22) se scrie, ținând cont că sarcinile $+q$ îi corespunde $-q_p$:

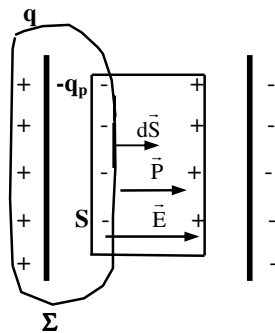


Fig. 3.1.22

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q - q_p) \quad (3.1.61)$$

Deoarece suprafața Σ se poate lua foarte aproape de fața (S) a dielectricului, se poate scrie relația :

$$q_p = \iint_S \sigma_p dS = \oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3.1.62)$$

Înlocuind (3.1.62) în (3.1.61) se obține:

$$\oint_{\Sigma} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

sau sub formă locală:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (3.1.63)$$

care se numește **legea lui Gauss generalizată**, deoarece este valabilă și pentru mediile neomogene, unde apar sarcini de polarizare în volum, ρ_p , dar care nu pot influența fluxul inducției electrice.

3.1.11. Energia câmpului electrostatic

Procesul de încărcare a unui condensator plan de grosime d , cu sarcina electrică Q până când diferența de potențial dintre plăci (3.1.25) devine

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot d \quad (3.1.64)$$

poate fi imaginat astfel: se deplasează sarcina Q de la una din plăci la cealaltă, pe baza efectuării unui lucru mecanic $\mathcal{L}$, acest lucru mecanic va fi măsura energiei condensatorului încărcat.

Între sarcina Q și tensiunea U dintre plăci există relația (3.1.48):

$$Q = C(V_1 - V_2) = CU \quad (3.1.65)$$

În timpul încărcării condensatorului sarcina Q crește iar împreună cu ea și tensiunea U , dar în orice moment, aceste mărimi sunt legate prin relația (3.1.65). Lucrul mecanic $d\mathcal{L}$ care trebuie cheltuit pentru a transporta sarcina dQ de la o placă la cealaltă este, conform (3.1.30) :

$$d\mathcal{L} = (V_1 - V_2) dQ = U dQ \quad (3.1.66)$$

Desigur, mărimile U , V_1 , V_2 au valorile din momentul considerat. După ce a fost transportată, sarcina dQ ridică tensiunea dintre plăci cu valoarea dU și deci, din relația (3.1.65) rezultă:

$$dQ = C dU \quad (3.1.67)$$

iar din (3.1.66):

$$d\mathcal{L} = CU dU \quad (3.1.68)$$

de unde, pentru energia condensatorului se obține :

$$W_e = \mathcal{L} = C \int_0^U U dU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (3.1.69)$$

Având în vedere relațiile (3.1.50) și (3.1.64), din (3.1.69) se poate scrie energia condensatorului în funcție de intensitatea câmpului electric E :

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd \quad (3.1.70)$$

Această relație arată că în câmpul electric există o energie și deci, se poate vorbi despre o *energie a câmpului electrostatic*. Formula (3.1.69) leagă energia condensatorului de sarcinile de pe armături iar formula (3.1.70) de intensitatea câmpului E . Apare astfel problema localizării (concentrării) energiei, în sensul că trebuie precizat cine este purtătorul energiei electrice: sarcinile sau câmpul ? În cadrul electrostaticii, care studiază câmpurile electrice constante în timp ale sarcinilor imobile, este imposibil să se dea un răspuns. Câmpurile constante și sarcinile care le creează nu pot exista în mod independent. Însă câmpurile electrice variabile în timp pot exista independent de sarcini și se propagă în spațiu sub formă de *unde electromagnetice*. Experiența arată că undele electromagnetice transportă energie (așa cum se va arăta în subcapitolul 3.4). Prin urmare, se poate considera că purtătorul energiei electrostatice este câmpul electric.

În formula (3.1.70), produsul Sd reprezintă volumul $\mathcal{V}$ al spațiului dintre plăcile condensatorului plan și deci se poate introduce noțiunea de *densitate volumică de energie*, care se exprimă prin relația:

$$w_e = \frac{W}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (3.1.71)$$

sau în cazul prezenței unui dielectric între armături, ținând cont de relația (3.1.57):

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (3.1.72)$$

3.2. ELECTROKINETICA

3.2.1. Curentul electric. Intensitatea curentului electric. Ecuația de continuitate.

Curentul electric este fenomenul de transfer de electricitate printr-un corp sau lanț de corpuri (circuit electric) sub acțiunea unui câmp electric aplicat. Curentul electric poate circula numai în corpuri cu purtători mobili de sarcini electrice: metale, electroliți (soluții apoase de acizi, baze, săruri), semiconductori, gaze ionizate etc. Purtătorii mobili de sarcină au o mișcare dezordonată datorită agitației termice. Sub acțiunea unui câmp electric aplicat, ei capătă și o mișcare dirijată prin care se realizează transferul de sarcini electrice.

Curentul electric care se obține prin deplasarea dirijată a sarcinilor libere în mediile conductoare de electricitate se numește **curent electric de conducție**. Deplasarea sarcinilor unui corp macroscopic încărcat electric (conductor sau izolant), împreună cu corpul, dă naștere unui **curent electric de convecție**.

Ne ocupăm numai de *regimul staționar* al curentului de conducție, adică în unitatea de timp, în orice moment, prin secțiunea normală a unui conductor este transferată aceeași sarcină. *Intensitatea curentului electric de conducție*, care este o mărime primitivă, se definește ca fiind raportul dintre sarcina dq transferată în intervalul de timp dt printr-o secțiune normală a unui conductor și durata dt :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (3.2.1)$$

Unitatea de măsură a intensității curentului electric este amperul, $[I]_{SI} = C/s = A$.

Considerăm un tub de curent electric, o suprafață S_n normală la direcția de mișcare a purtătorilor de sarcini și o altă suprafață S care face un unghi θ cu S_n . Între normalele la cele două suprafețe va exista același unghi, θ (fig. 3.2.1). Curentul electric de conducție poate fi caracterizat și de *densitatea de curent*, definită ca fiind cantitatea de electricitate ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață orientată normal pe direcția de deplasare a sarcinilor electrice:

$$j = \frac{dq}{S_n \cdot dt} = \frac{I}{S \cdot \cos \theta} \quad (3.2.2)$$

sau vectorial,

$$\vec{j} = j \cdot \vec{k}$$

unde $\vec{k}$ este versorul direcției de transfer maxim al sarcinilor prin secțiunea conductorului. *Linia de curent* este o curbă tangentă la direcția locală a vectorului densitate de curent.

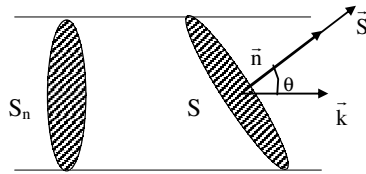


Fig. 3.2.1

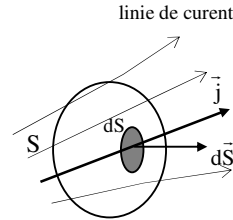


Fig. 3.2.2

În cazul când secțiunea S nu este plană și vectorul $\vec{j}$ nu are aceeași valoare pe întreaga secțiune, se împarte secțiunea S în elemente dS în care vectorul $\vec{j}$ este constant (fig. 3.2.2). Se poate scrie:

$$\vec{j} = \frac{dq}{dS_n \cdot dt} \vec{k} = \frac{dq}{dS \cdot \cos \theta \cdot dt} \vec{k} = \frac{dq}{d\vec{S} \cdot \vec{k} \cdot dt} \vec{k} \quad (3.2.3)$$

unde s-a folosit faptul că $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, deci $d\vec{S} \cdot \vec{k} = dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{k} = dS \cdot \cos \theta$.

Din ultima parte a relației (3.2.3) rezultă:

$$\vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

unde dI este elementul de curent care trece prin elementul de suprafață dS . Curentul total, prin toată secțiunea S a conductorului, va fi:

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.2.4)$$

adică *intensitatea curentului electric este egală cu fluxul densității de curent prin secțiunea conductorului*.

Într-un mediu conductor, nu există transfer de sarcină fără un transfer simultan de masă, deoarece sarcina electrică, ca mărime de stare, caracterizează obligatoriu un sistem fizic. Se poate stabili o relație între densitatea de curent $\vec{j}$ și viteza de transfer $\vec{v}$ a sarcinilor electrice. Astfel, înmulțind și împărțind în relația (3.2.3) cu $d\vec{r}$ – elementul de deplasare pe direcția de transfer a sarcinii dq – se obține:

$$\vec{j} = \frac{dq \cdot d\vec{r}}{dS_n \cdot d\vec{r} \cdot dt} \quad \vec{k} = \frac{dq}{dS_n \cdot d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho \cdot \vec{v} \quad (3.2.5)$$

unde ρ este densitatea volumică de sarcină și $d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \vec{k}$. Deci densitatea curentului de conducție este egală cu produsul dintre densitatea volumică de sarcină și viteza macroscopică de transfer a sarcinilor electrice.

Vom găsi în continuare o altă relație între densitatea de curent și densitatea volumică de sarcină, numită **ecuația de continuitate** și care exprimă **legea conservării sarcinilor electrice** în timpul transferului de sarcini.

Pentru aceasta considerăm o suprafață *închisă* S de volum $\mathcal{V}$, în interiorul unui mediu conductor în care are loc un transfer de sarcini electrice (fig. 3.2.3). Dacă la momentul t_0 în interiorul suprafeței S se află sarcina q_0 , la un moment ulterior t , o parte din sarcini sunt transferate spre exteriorul suprafeței S iar altă parte q_{int} se află în această suprafață, deci

$$q_0 = q_{\text{int}} + q_{\text{transf}}.$$

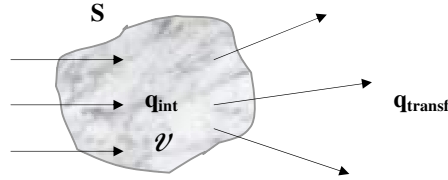


Fig. 3.2.3

Întrucât sarcinile electrice nu apar și nu dispar, $q_0 = \text{const.}$ și prin derivare în raport cu timpul rezultă:

$$-dq_{\text{int}} = dq_{\text{transf}} = I \cdot dt \Rightarrow \frac{dq_{\text{int}}}{dt} + I = 0 \quad (3.2.6)$$

Exprimând din (3.1.1) sarcina din volumul $\mathcal{V}$ în funcție de densitatea volumică $\rho(\vec{r}, t)$,

$$q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V},$$

și din (3.2.4), intensitatea curentului electric prin suprafața închisă S , folosind teorema Green-Gauss-Ostrogradski,

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{j} \cdot d\mathcal{V}, \quad (3.2.6')$$

înlocuind aceste relații în (3.2.6), se obține:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{j} \cdot d\mathcal{V} = 0 \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) d\mathcal{V} = 0$$

Deoarece volumul $\mathcal{V}$ este arbitrar, integrandul trebuie să fie nul:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.2.7)$$

expresie care reprezintă **forma diferențială a ecuației de continuitate a curentului electric**.

Din (3.2.6) și (3.2.6') rezultă **forma integrală a ecuației de continuitate**:

$$-\frac{dq_{\text{int}}}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.2.7')$$

deci micșorarea sarcinii electrice din volumul V , în unitatea de timp, este egală cu fluxul densității de curent prin frontiera S a acestui volum.

În regim *staționar*, deși sarcinile electrice nu se găsesc în echilibru, mărimile macroscopice, cum ar fi densitatea volumică de sarcină, sunt independente de timp și din (3.2.7) rezultă:

$$\rho = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.2.8)$$

deci $\vec{j}$ este un vector *solenoidal*, liniile de curent electric fiind întotdeauna linii închise, adică curentul electric staționar se poate stabili numai în circuite închise.

3.2.2. Legea lui Ohm

În mediul conductor ia naștere un curent electric dacă purtătorii de sarcină sunt antrenați într-o mișcare ordonată. Aceasta se poate realiza dacă asupra fiecărui purtător de sarcină acționează o forță $\vec{F}$ determinată de existența unui câmp de natură electrostatică $\vec{E}$:

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

unde q este sarcina unui purtător de sarcină.

Sub acțiunea acestei forțe purtătorii de sarcină ar trebui să se deplaseze uniform accelerat, dar curentul electric care apare este continuu deoarece purtătorii (electronii) se ciocnesc cu particulele ce constituie mediul conductor (ionii rețelei cristaline) și la fiecare ciocnire ei pierd energie. Aceste ciocniri au rolul de frânare și efectul lor este similar cu a unei forțe de frecare F_f al cărei modul, pentru viteze mici, depinde liniar de viteza v a purtătorilor:

$$F_f = -a v$$

Ecuația diferențială de mișcare a unui purtător în câmpul electric E este:

$$m \frac{dv}{dt} = qE - av$$

de unde, prin integrare cu condiția ca la $t = 0$ (când s-a aplicat câmpul electric E), viteza $v = 0$, rezultă:

$$m \int_0^v \frac{dv}{qE - av} = \int_0^t dt \Rightarrow v = \frac{qE}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{m}t} \right) \quad (3.2.9)$$

Mărima $\tau = m / a$ se numește *time de relaxare* și reprezintă intervalul de timp în care viteza purtătorilor de sarcină se micșorează de e ori datorită ciocnirilor.

Exponențiala din relația (3.2.9) scade rapid, astfel încât regimul tranzitoriu nu durează mult și soluția (3.2.9) poate fi aproximată cu:

$$v = \frac{q\tau}{m} E = \mu E \quad (3.2.10)$$

unde coeficientul de proporționalitate $\mu = \frac{q\tau}{m}$ se numește *mobilitate* a purtătorilor de sarcină,

depinzând de tipul purtătorilor de sarcină și, prin τ , de starea fizică a mediului conductor.

Datorită mișcării de agitație termică diversele sarcini elementare nu au aceeași viteză și se pot deplasa cu viteze diferite, această mișcare suprapunându-se peste mișcarea ordonată care constituie curentul electric. Dacă n_i purtători de sarcină din unitatea de volum ($n_i = N_i / V$) se deplasează cu viteza $\vec{v}_i$, se definește viteza *medie*, numită și *viteză de drift*.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum n_i \vec{v}_i}{n_0} \quad (3.2.11)$$

unde $n_0 = \sum n_i$ este numărul total al purtătorilor de sarcină existenți în unitatea de volum.

Ținând cont de relația (3.2.5), densitatea de curent se poate scrie sub forma:

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \sum_i \frac{N_i q}{V} \cdot \vec{v}_i = q \sum_i n_i \vec{v}_i$$

sau, ținând cont de relația (3.2.11),

$$\vec{j} = q n_0 \langle \vec{v} \rangle$$

și exprimând viteza de drift sub forma (3.2.10) se obține **legea locală (diferențială) a lui Ohm** care evidențiază proporționalitatea dintre densitatea curentului de conducție și intensitatea câmpului electric sub acțiunea căruia se transferă sarcina în conductor:

$$\vec{j} = q n_0 \mu \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3.2.12)$$

Mărimile

$$\sigma = n_0 q \mu = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} \quad (3.2.13)$$

reprezintă *conductivitatea electrică* și caracterizează gradul de conducție electrică a conductoarelor.

Pentru un *conductor omogen cilindric* de lungime ℓ , plasat într-un câmp electric omogen $\vec{E} = \text{const.}$ (fig. 3.2.4) se pot scrie relațiile:

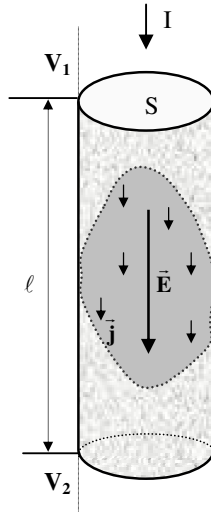


Fig 3.2.4

$$E = -|\nabla V| = -\frac{V_2 - V_1}{\ell} = \frac{U}{\ell}$$

$$\vec{j} = \text{const.} \Rightarrow j = \frac{dI}{dS} = \frac{I}{S}$$

și legea lui Ohm (3.2.12) devine:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{\ell} \Rightarrow U = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S} I \quad (3.2.14)$$

Mărimile

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S} = \rho_{el} \frac{\ell}{S} \quad (3.2.15)$$

este *rezistența electrică* a conductorului iar

$$\rho_{el} = \frac{1}{\sigma}$$

reprezintă *rezistivitatea* conductorului (inversul conductivității).

Astfel, legea lui Ohm (3.2.14) pentru conductoare omogene cilindrice devine:

$$U = RI \quad (3.2.16)$$

3.2.3. Tensiunea electromotoare

Menținerea unui curent electric permanent într-un circuit *închis* presupune utilizarea unei *surse de tensiune* care generează în permanență o forță ce asigură mișcarea purtătorilor de sarcină electrică în conductor. Lucrul mecanic al acestor forțe provine din variația energiei sursei într-un proces complex (reacții chimice, fenomene termoelectrice, fotoelectrice). Sursa (generatorul) de

tensiune creează un *câmp electric imprimat* $\vec{E}_i$ care menține circulația curentului continuu prin circuit și care se suprapune peste câmpul electric $\vec{E}$ determinat de interacțiunea electrostatică a sarcinilor electrice în repaus:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E} + \vec{E}_i$$

Legea lui Ohm diferențială (3.2.12) se scrie :

$$\frac{1}{\sigma} \vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_i \quad (3.2.17)$$

din care, integrând pentru o porțiune de circuit între două puncte 1 și 2, se obține :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} d\vec{\ell} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{\ell} \quad (3.2.18)$$

Prin analogie cu definiția (3.1.26), circulația între două puncte a câmpului electric imprimat,

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{\ell} \quad (3.2.19)$$

se numește *tensiune electromotoare* și caracterizează capacitatea unui generator de a întreține un curent pe circuit.

Deoarece vectorii $\vec{j}$ și $d\vec{\ell}$ sunt paraleli în orice punct, se poate scrie:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} d\vec{\ell} = \int_1^2 \frac{1}{\sigma} j d\ell = I_{12} \int_1^2 \frac{1}{\sigma} \frac{d\ell}{S}$$

unde I_{12} este intensitatea curentului prin conturul considerat.

Rezistența electrică a circuitului între punctele 1 și 2 este, conform (3.2.15):

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{1}{\sigma} \frac{d\ell}{S} \quad (3.2.20)$$

Înlocuind ultimele trei relații în (3.2.18) și din definiția (3.1.26) a tensiunii U se obține *căderea de tensiune* pe rezistența R_{12} ca suma dintre tensiunea electromotoare și diferența de potențial dintre cele două puncte ale circuitului:

$$I_{12} R_{12} = \mathcal{E}_{12} + U \quad (3.2.21)$$

care reprezintă **legea lui Ohm integrală** pentru o porțiune deschisă de circuit.

Căderea de tensiune este egală cu diferența de potențial numai pe porțiunea de circuit în care nu acționează forțe imprimate, adică nu există surse de tensiune electromotoare.

3.2.4. Legea lui Joule

Dacă printr-un conductor circulă un curent continuu cu intensitatea constantă, determinat de un câmp electric constant, asupra fiecărui purtător de sarcină va acționa forța

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

care, între două puncte ale conductorului, efectuează lucrul mecanic

$$\mathcal{L} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{\ell} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} \quad (3.2.22)$$

Cu (3.1.26) relația (3.2.22) devine:

$$\mathcal{L} = q U \quad (3.2.23)$$

Conform (3.2.1)

$$q = I t$$

și lucrul mecanic din (3.2.23) se scrie:

$$\mathcal{L} = U I t \quad (3.2.24)$$

Acest lucru mecanic efectuat asupra purtătorilor de sarcină de către câmpul electric extern nu folosește la mărirea energiei lor cinetice, deoarece viteza de drift se menține constantă în cazul curentului continuu ($j = \text{const.}$). Înseamnă că purtătorii de sarcină nu rețin energia primită de la câmpul extern, ci o transformă în general sub formă de căldură mediului conductor în urma ciocnirilor cu particulele care îl compun.

Dacă mediul conductor de volum $\mathcal{V}$ are rezistența electrică R și este străbătut de curentul de intensitate I , căldura absorbită în timpul t este, ținând cont de (3.2.16):

$$Q = R I^2 t \quad (3.2.25)$$

Pentru o porțiune elementară de circuit de volum $d\mathcal{V}$, lungime $d\ell$ și secțiune dS ($d\ell \cdot dS = d\mathcal{V}$) se poate scrie conform (3.2.4) pentru I și (3.2.20) pentru R și ținând cont de legea lui Ohm (3.2.12):

$$dQ = t \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{d\ell}{dS} \cdot j^2 (dS)^2 = t \cdot \sigma E^2 d\mathcal{V},$$

de unde, prin integrare pe întreg volumul conductorului, se obține:

$$Q = t \iiint_{\mathcal{V}} \sigma E^2 d\mathcal{V} \quad (3.2.26)$$

Relațiile (3.2.25) sau (3.2.26) reprezintă **legea lui Joule sub formă integrală**.

Efectuând integrarea în (3.2.26) se poate defini puterea specifică w_J a curentului electric ca fiind căldura absorbită în unitatea de timp de unitatea de volum de mediu conductor

$$w_J = \frac{dQ}{t d\mathcal{V}} = \sigma E^2 \quad (3.2.27)$$

Expresia obținută în (3.2.27) reprezintă **legea lui Joule sub forma locală (diferențială)**.

3.3. MAGNETOSTATICĂ

3.3.1. Câmpul magnetic constant. Inducția magnetică.

După cum o sarcină electrică în repaus produce un câmp electrostatic, un curent electric produce în jurul său un **câmp magnetic**. Astfel, câmpul magnetic este *rezultatul mișcării sarcinilor electrice*.

Interacțiunea dintre două circuite parcurse de curent electric, apariția unui cuplu de forțe ce acționează fie asupra unui circuit închis parcurs de un curent staționar, fie asupra unui ac magnetic dacă se află în vecinătatea unui alt circuit parcurs de un curent, sunt *manifestări ale câmpului magnetic*. Prin câmp magnetic se înțelege un domeniu în care se exercită forțe magnetice asupra unor curenți electrici sau asupra unor magneți.

Experimental s-a observat că în jurul unui circuit rectiliniu parcurs de un curent constant, un ac magnetic, care are posibilitatea de a se roti într-un plan perpendicular pe circuit, se orientează pe direcția perpendiculară pe raza vectoare care unește circuitul cu punctul în care se află acul (fig. 3.3.1) iar sensul este dat de *regula burghiului drept*: nordul indică sensul în care trebuie rotit burghiul drept pentru a se deplasa în sensul curentului. Repetând experiența cu pilitură de fier presărată pe un plan orizontal, traversat de un conductor vertical parcurs de un curent, aceasta se orientează în mod similar, formând linii circulare concentrice în jurul curentului. În plus, se constată că liniile de pilitură se răresc pe măsură ce crește distanța față de conductor.

Mărimea fundamentală care caracterizează câmpul magnetic într-un punct în vid este *vectorul inducție magnetică*, $\vec{B}$, care este o mărime *primitivă*, introdusă experimental. Câmpul magnetic, la fel ca și câmpul electric, este reprezentat prin linii de câmp care sunt curbe tangente în fiecare punct la vectorul $\vec{B}$ (fig. 3.3.1).

Caracteristic liniilor de câmp magnetic este faptul că sunt curbe *închise* (așa cum evidențiază și experiența cu pilitura de fier), spre deosebire de liniile de câmp electric care sunt curbe *deschise*. Unitatea de măsură a inducției magnetice este Tesla (T).

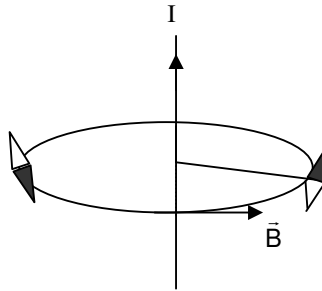


Fig. 3.3.1

Între inducția magnetică $\vec{B}$ și intensitatea câmpului magnetic, $\vec{H}$, în vid există relația de proporționalitate:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.3.1)$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a vidului ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$); $[H] = \text{A/m}$.

Pentru studiul teoretic al câmpului magnetic se folosesc:

- elementul de curent*, $I \cdot d\vec{\ell}$, cu sensul vectorial dat de sensul curentului I ce străbate un conductor de lungime elementară $d\ell$ și
- bucla de curent*, de dimensiuni foarte mici, ce joacă rolul unei sonde și căreia i se atribuie un *moment magnetic*.

3.3.2. Legea Biot – Savart - Laplace

În anul 1820, Biot și Savart au constatat experimental că într-un punct P situat la distanța r de un conductor rectiliniu – practic infinit lung – parcurs de un curent de intensitate I (fig. 3.3.2. a), apare un câmp magnetic de intensitate:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.3.2)$$

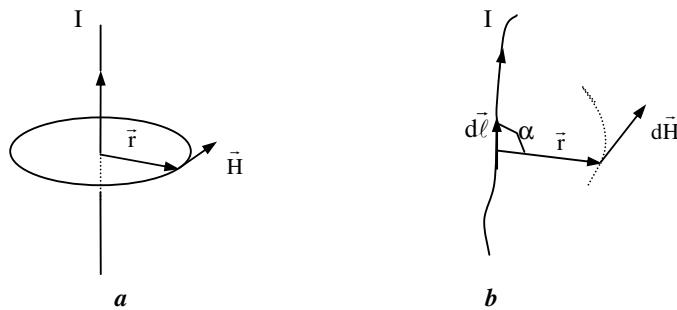


Fig. 3.3.2.

Laplace a generalizat această relație și a arătat că un câmp magnetic creat de un curent ce străbate un conductor de o formă oarecare, dar care prezintă o simetrie cilindrică a densității de curent, poate fi exprimat ca suma vectorială (superpoziția) a câmpurilor create de porțiunile

elementare de conductor. Pentru câmpul magnetic creat de un element de curent de lungime $d\ell$ la distanța r (fig. 3.3.2. b), Laplace a stabilit formula :

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.3.3)$$

sau, în modul,

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Id\ell \cdot \sin \alpha}{r^2} \quad (3.3.3')$$

unde $d\vec{\ell}$ este vectorul element de lungime a cărui direcție coincide cu cea a curentului I , iar $\vec{r}$ este vectorul ce unește elementul de curent cu punctul în care se determină $d\vec{H}$ sau $\vec{H}$. Câmpul magnetic creat de întreg conductorul se obține prin integrarea relației (3.3.3') pentru cazul concret, particular, considerat. Relațiile (3.3.3) și (3.3.3') sunt cunoscute sub denumirea de **legea Biot-Savart-Laplace** și au valabilitate restrânsă la cazul *staționar*.

Ținând cont de relația (3.3.1), pentru inducția magnetică elementară creată în vid sau în aer de elementul de curent $I \cdot d\vec{\ell}$ se poate scrie o relație asemănătoare cu (3.3.3):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.3.4)$$

sau, în modul,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \cdot \sin \alpha}{r^2} \quad (3.3.4')$$

Cu relația (3.3.4) se poate calcula inducția câmpului magnetic pentru sistemele simple de curenți staționari.

a) *Curentul liniar.*

Considerăm un conductor foarte lung, aflat în aer și parcurs de curentul electric de intensitate I (fig. 3.3.3. a). Inducția creată de porțiunea $d\vec{\ell}$ din conductor într-un punct M aflat la distanța r de elementul de curent și la distanța d de conductor este dată în modul de relația (3.3.4') scrisă pentru unghiul θ , vectorul $d\vec{B}$ fiind orientat perpendicular pe planul vectorilor $d\vec{\ell}$ și $\vec{r}$. Pentru integrare este necesar să avem o singură variabilă. Observăm că

$$d\ell \cdot \sin \theta = d\ell \cdot \cos \alpha = r \cdot d\alpha \quad \text{și} \quad r = \frac{d}{\cos \alpha},$$

deci

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos \alpha d\alpha \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha.$$

Pentru un conductor liniar, infinit de lung, $\alpha_1 = -\pi/2$ și $\alpha_2 = +\pi/2$, obținându-se

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (3.3.5)$$

sau, pentru câmpul magnetic,

$$H = \frac{I}{2\pi d}$$

adică legea Biot-Savart (3.3.2).

b) *Curentul circular.*

Considerăm un conductor circular Γ de rază R , prin care circulă curentul I (fig. 3.3.3. b). Calculăm câmpul magnetic creat de spira de curent Γ , într-un punct M , aflat pe dreapta perpendiculară pe planul spirei, în centrul său.

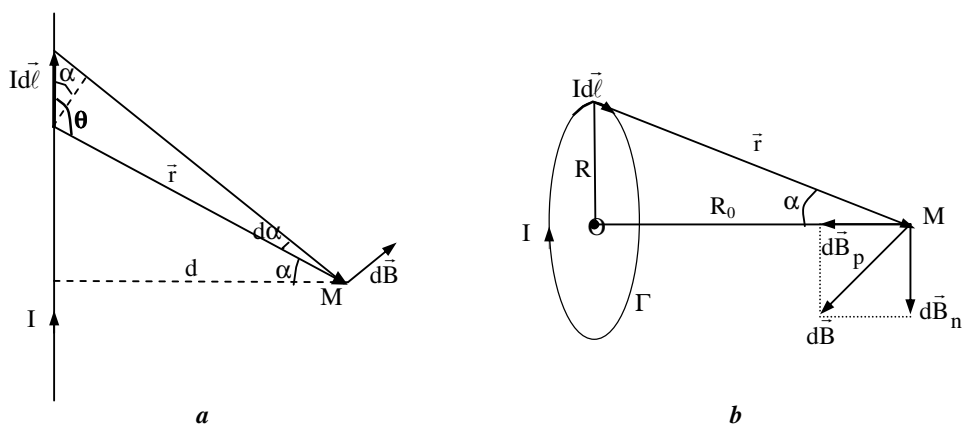


Fig. 3.3.3

Un element $d\vec{\ell}$ al spirei determină în M un câmp magnetic de inducție $d\vec{B}$, perpendicular pe vectorul $\vec{r}$, având componentele $d\vec{B}_p$ și $d\vec{B}_n$. Câmpul magnetic rezultat are inducția:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma} d\vec{B} = \oint_{\Gamma} d\vec{B}_p + \oint_{\Gamma} d\vec{B}_n$$

Din motive de simetrie,

$$\oint_{\Gamma} d\vec{B}_n = 0$$

iar

$$dB_p = dB \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{r^2} \sin \alpha$$

unde

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R_0^2}},$$

R_0 fiind distanța dintre centrul O al spirei și punctul M.

Integrând pe toată lungimea spirei, obținem $\oint_{\Gamma} d\ell = 2\pi R$ și inducția magnetică în punctul

M se scrie:

$$B = \oint_{\Gamma} dB_p = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + R_0^2)^{3/2}}$$

În centrul spirei, $R_0 = 0$ iar valoarea inducției magnetice este

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Observație. Relațiile obținute pentru inducția magnetică creată de un curent staționar în vid sau în aer sunt valabile și pentru un mediu oarecare, caracterizat de permeabilitatea magnetică $\mu = \mu_0 \mu_r$ (μ_r – permeabilitatea relativă a mediului), în care $\vec{B}$ depinde de proprietățile mediului:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

așa cum vom vedea în § 3.3.7.

3.3.3. Momentul dipolar magnetic

Dacă se consideră un contur circular de diametru mic (o buclă), parcurs de un curent staționar I , orientarea conturului în spațiu poate fi caracterizată prin direcția normalei pozitive (determinată după regula burghiului) $\vec{n}$ la contur (fig. 3.3.4). Acest contur se comportă ca un mic magnet fiind numit *dipol magnetic*. Sensul normalei $\vec{n}$ este în același timp și sensul sud-nord al câmpului produs de curentul circular. Într-un câmp magnetic *uniform* de inducție $\vec{B}_0$ asupra dipolului magnetic acționează o forță de orientare (mai exact, un cuplu de forțe $\vec{F}$), normala pozitivă $\vec{n}$ orientându-se paralel cu direcția câmpului. Experimental s-a constatat că $\vec{F}$ este proporțional cu curentul I din contur și cu aria S a conturului, dar nu depinde de forma conturului. Pe această bază s-a definit *momentul magnetic* $\vec{m}$ al dipolului prin relația:

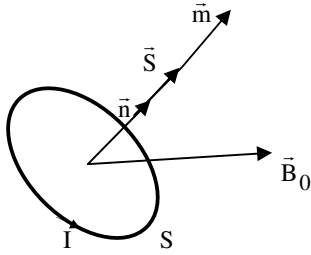


Fig. 3.3.4

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n} \quad (3.3.6)$$

Momentul cuplului de forțe $\vec{C}$ este atunci :

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad (3.3.7)$$

Dacă dipolul se află într-un câmp *neuniform*, este evident că datorită faptului că forțele ce corespund câmpului din cazul câmpului uniform nu mai sunt egale, pe lângă cuplul de forțe va apare o forță ce va produce accelerarea centrului de masă al dipolului magnetic. Se poate arăta că această forță are o expresie asemănătoare cu (3.1.37) în cazul câmpului electric neuniform, dar în loc de momentul electric $\vec{p}$ apare aici momentul magnetic $\vec{m}$:

$$\vec{f} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}_0) \quad (3.3.8)$$

Prin urmare, un dipol magnetic de moment $\vec{m}$, situat într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}_0$ posedă o energie potențială :

$$U_{\text{mag}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 \quad (3.3.9)$$

Cuplul de forțe are tendința să alinieze dipolul magnetic la direcția vectorului $\vec{B}_0$, astfel încât energia potențială să fie minimă (poziția de echilibru stabil).

3.3.4. Interacțiuni electromagnetice

3.3.4.1. Forța electromagnetică (Laplace)

Să considerăm o buclă de curent de formă dreptunghiulară de laturi ℓ_1 și ℓ aflată în planul xOy, prin care circulă un curent de intensitate I , introdusă într-un câmp de inducție magnetică $\vec{B}$ ale cărei linii de câmp sunt paralele cu latura ℓ_1 , în sensul axei Oy (fig. 3.3.5).

Conform relației (3.3.7), momentul cuplului ce acționează asupra buclei de moment magnetic

$$\vec{m} = I\vec{S} = I \ell_1 \ell \cdot \vec{I}_z,$$

orientat perpendicular pe planul buclei, este:

$$\vec{C} = I \ell_1 \ell \cdot (\vec{I}_z \times \vec{B})$$

și cum

$$\vec{B} = B \cdot \vec{I}_y$$

se poate scrie :

$$\vec{C} = - I \cdot \ell_1 \ell \cdot \vec{B} \cdot \vec{I}_x \quad (3.3.11)$$

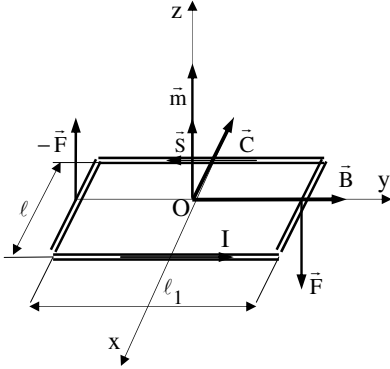


Fig. 3.3.5

Pentru a ajunge la echilibru (paralelism între vectorii $\vec{m}$ și $\vec{B}$) circuitul se rotește în jurul unei axe plasate în planul figurii, perpendiculare pe $\vec{B}$, deci asupra laturilor de lungime ℓ ale buclei, perpendiculare pe $\vec{B}$, acționează un cuplu de forțe ($\vec{F}$, $-\vec{F}$) egale și de sens contrar, de modul F , al cărui moment este:

$$\vec{C} = \vec{\ell}_1 \times \vec{F} = (\ell_1 \cdot \vec{I}_y) \times (-F \cdot \vec{I}_z) = -\ell_1 F \cdot \vec{I}_x$$

Prin egalarea acestuia cu expresia (3.3.11) rezultă:

$$F = I \ell B$$

sau, ținând cont de orientarea vectorilor,

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (3.3.12)$$

Relația (3.3.12) reprezintă *forța electromagnetică* cu care acționează câmpul magnetic de inducție $\vec{B}$ asupra unui conductor de lungime ℓ parcurs de curentul I , numită și *forță Laplace*. Sensul acesteia este dat de *regula mâinii stângi*: se așează mâna stângă paralel cu conductorul, cu degetele în sensul curentului și cu degetul mare ridicat, astfel încât vectorul inducție magnetică să intre în palmă; degetul mare indică sensul forței electromagnetice.

Asupra unui element de curent $I \cdot d\vec{\ell}$ ($d\vec{\ell}$ are sensul curentului I) acționează din partea câmpului magnetic forța:

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (3.3.13)$$

În cazul în care curentul nu este filiform ci distribuit într-un element de volum $d\mathcal{V} = d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$ având densitatea de curent $\vec{j}$ (deci $I = \vec{j} \cdot d\vec{S}$) se poate scrie:

$$d\vec{F} = \vec{j} \cdot d\vec{S} (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = (\vec{j} \times \vec{B}) d\mathcal{V} \quad (3.3.14)$$

3.3.4.2. Forța electrodinamică

Se constată experimental că între două conductoare parcurse de curenți electrici apar forțe de interacțiune numite *forțe electrodinamice*.

Să considerăm două conductoare paralele, de lungime foarte mare, care se află la distanța a unul de altul și sunt parcurși de curenții I_1 și I_2 în același sens (fig. 3.3.6). Fiecare curent se află în câmpul magnetic creat de celălalt, deci fiecare curent este solicitat de o forță electromagnetică care tinde să-l deplaseze în sensul ei. Conductorul prin care circulă curentul I_2 se află în câmpul magnetic de inducție B_1 , al curentului I_1 . În acest caz forța electromagnetică F_2 cu care câmpul magnetic B_1 acționează asupra porțiunii de conductor de lungime ℓ străbătut de curentul I_2 este:

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{\ell} \times \vec{B}_1$$

sau, în modul, ținând cont de orientarea celor doi vectori:

$$F_2 = I_2 \ell B_1 \quad (3.3.15)$$

Aplicând regula produsului vectorial se constată că sensul forței F_2 este astfel încât să apropie conductorul prin care circulă curentul I_2 de conductorul prin care circulă curentul I_1 . Inducția magnetică B_1 se poate afla cu relația (3.3.10):

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}$$

și forța electrodinamică are expresia :

$$F = \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi a} \ell \quad (3.3.16)$$

care este egală și de sens contrar cu forța care acționează asupra curentului I_1 din partea curentului I_2 . Dacă curenții sunt de sens contrar, între ei se exercită o forță de respingere.

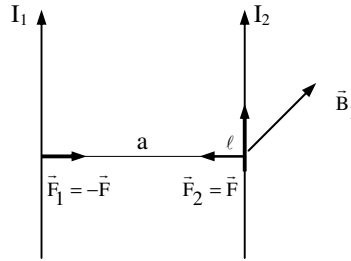


Fig. 3.3.6

Relația (3.3.16) stă la baza definirii unității de măsură a intensității curentului electric în SI: *amperul* este intensitatea unui curent electric constant, care menținut în două conductoare paralele, rectilinii, de lungime infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezate în vid la distanța de un metru unul de altul, produce între acestea o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe unitatea de lungime.

3.3.4.3. Forța Lorentz

Forța Lorentz este forța care acționează asupra particulelor încărcate cu sarcină electrică aflate în mișcare în câmp magnetic. Forța Laplace care acționează asupra elementului de curent $I d\vec{\ell}$ produs de o distribuție de sarcină de densitate volumică $\rho = \frac{dq}{dV}$ în mișcare cu viteza $\vec{v}$ în câmp magnetic de inducție $\vec{B}$, este, ținând cont de relația (3.3.14) și de expresia (3.2.5) a densității de curent:

$$d\vec{F} = \rho (\vec{v} \times \vec{B}) dV = dq (\vec{v} \times \vec{B})$$

Forța care acționează asupra unei particule încărcate cu sarcina q în câmp magnetic se numește *forță Lorentz* și are expresia :

$$\vec{F}_L = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.3.17)$$

fiind normală la planul determinat de vectorii $\vec{v}$ și $\vec{B}$, deci efectul pe care-l produce este numai de modificare a direcției de mișcare a particulei, fără să schimbe valoarea vitezei acesteia; câmpul magnetic nu accelerează particulele încărcate. În concluzie, forța Lorentz este o forță centripetă, deci sub acțiunea ei particula cu sarcina q se mișcă pe un cerc cu raza R care se determină din condiția ca mișcarea circulară a particulei să fie uniformă :

$$q v B = \frac{m v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{q B} \quad (3.3.18)$$

3.3.5. Legea circuitului magnetic (legea lui Ampère)

Se consideră într-un mediu omogen un contur C plan, de o formă oarecare, ce înconjoară un conductor rectiliniu infinit, parcurs de curentul I (fig. 3.3.7). Liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice într-un plan perpendicular pe planul desenului. Dacă se alege, în mod convențional, sensul de parcurgere a curbei C în sensul invers acelor de ceasornic, adică același sens cu al liniilor de câmp magnetic, din figura 3.3.7 se observă că :

$$\vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot d\ell \cdot \cos \theta = H \cdot d\ell_o = H \cdot r \cdot d\varphi,$$

unde s-a ținut seama de faptul că $d\ell$ este o mărime infinitesimală. Dar H este dat de relația (3.3.2) și, prin urmare, circulația vectorului $\vec{H}$ pe conturul C este

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C H \cdot r \cdot d\varphi = \frac{I}{2\pi} \oint_C d\varphi = I \quad (3.3.19)$$

sau, pentru vectorul inducție magnetică $\vec{B}$,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Relația (3.3.19) exprimă **legea circuitului magnetic (legea lui Ampère)**: “circulația vectorului câmp magnetic de-a lungul unei curbe închise din jurul unui conductor parcurs de curent este egală cu intensitatea curentului respectiv”.

Când curba C înconjoară mai mulți conductori prin care trec, respectiv, curenții $I_1, I_2, \dots, I_n$, atunci circulația lui $\vec{H}$ este egală cu suma algebrică a curenților:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{k=1}^n \pm I_k = \Theta \quad (3.3.20)$$

Mărimea

$$\Theta = \sum_{k=1}^n \pm I_k$$

se numește *solenatie* și se măsoară în amperi.

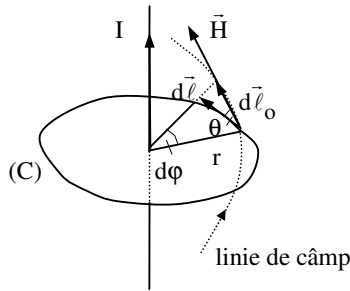


Fig. 3.3.7

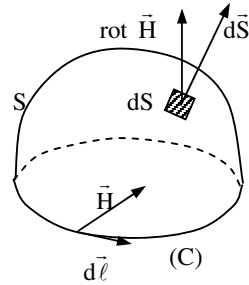


Fig. 3.3.8

Câmpul magnetic creat de curenți staționari ($I = \text{constant}$) este static (nu depinde de timp) și din acest motiv se mai numește *câmp magnetostatic*; acest capitol se referă numai la astfel de câmpuri.

Spre deosebire de circulația vectorului câmp electrostatic $\vec{E}$, care este nulă, circulația lui $\vec{H}$ nu se anulează decât în cazul când conturul închis (C) nu cuprinde conductori parcurși de curent electric.

Dacă se exprimă curentul I sub forma (3.2.4):

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

atunci din (3.3.19) se obține :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Aplicând teorema lui Stokes primului termen al acestei relații, rezultă (fig. 3.3.8):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.3.21)$$

unde S este o suprafață care se sprijină pe conturul C. Din (3.3.21) se obține

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3.3.22)$$

sau, pentru vectorul $\vec{B}$,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.3.22')$$

Relația (3.3.22) exprimă **forma diferențială a legii lui Ampère** și evidențiază caracterul *rotațional* al câmpului magnetic: densitatea de curent electric – deci deplasarea sarcinilor electrice – creează “vârtejuri” de câmp magnetic, adică linii de câmp *închise*, având rotorul lui $\vec{H}$ diferit de zero.

Legea lui Ampère asupra circulației vectorului $\vec{H}$ are în studiul câmpului magnetic aceeași importanță pe care o are legea lui Gauss în electrostatică. În particular, așa cum legea lui Gauss permite calculul câmpului $\vec{E}$ în cazul unor distribuții de sarcini, tot așa, legea lui Ampère permite determinarea intensității câmpului magnetic creat de curenți, fără a folosi legea Biot-Savart-Laplace (3.3.3), ceea ce simplifică mult calculele.

3.3.6. Fluxul inducției magnetice

Dacă într-un câmp magnetic se trasează curbele care au ca tangentă în fiecare punct vectorul inducție magnetică $\vec{B}$, se obțin liniile de inducție magnetică. Spre deosebire de liniile de inducție ale câmpului electrostatic, care pornesc și se termină pe sarcini și deci sunt linii *deschise* ($\text{div } \vec{D} = \rho$), liniile de inducție magnetică produse de curenți sunt curbe *închise*, adică nu există puncte din care aceste linii să poată diverge (nu există sarcini magnetice) și ca urmare

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.3.23)$$

câmpul magnetic fiind doar sub formă de vârtejuri, în jurul curenților electrici.

Această relație este adevărată întotdeauna, chiar și pentru câmpuri magnetice dinamice (nu numai în magnetostatică).

Ca și în cazul câmpului electric, se poate defini o mărime numită *flux al inducției magnetice* (*flux magnetic*), notată cu Φ .

Pe baza unui raționament analog celui expus în paragraful 3.1.3, pentru fluxul magnetic Φ printr-o suprafață S, se obține relația :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.3.24)$$

În conformitate cu teorema Green-Gauss-Ostrogradski și având în vedere relația (3.3.23), rezultă că fluxul magnetic printr-o suprafață *închisă* S este nul (același număr de linii de câmp intră și ies din suprafață):

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}'} \text{div } \vec{B} \, d\mathcal{V}' = 0 \quad (3.3.25)$$

Dacă se scriu sub forma unui tabel ecuațiile electrostaticii (3.1.63'), (3.1.28) și magnetostaticii (3.3.23), (3.3.22):

$$\text{electrostatică} \begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (3.3.26)$$

$$\text{magnetostatică} \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (3.3.27)$$

se observă că vectorul câmp electric $\vec{E}$ apare numai în primele două ecuații, iar vectorul câmp magnetic $\vec{H}$ numai în ultimele două. *Cele două câmpuri nu sunt interconectate.* Aceasta înseamnă că electricitatea și magnetismul sunt fenomene distincte când sarcinile și curenții sunt *statici*.

Interdependența dintre $\vec{E}$ și $\vec{H}$ apare când există variații în timp ale sarcinilor și curenților, de exemplu, în timpul descărcării unui condensator sau al deplasării unui magnet.

3.3.7. Câmpul magnetic în interiorul substanțelor magnetizate.

Vectorul magnetizație $\vec{M}$. Legătura dintre vectorii $\vec{B}$, $\vec{H}$ și $\vec{M}$.

O substanță se numește *magnetizată* dacă orice volum elementar dV din ea are un moment magnetic $d\vec{m}$ (se comportă ca o buclă de curent). Asemenea substanțe se caracterizează prin *vectorul magnetizație* definit ca fiind momentul magnetic al unității de volum din substanța respectivă:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV}, \quad \langle \vec{M} \rangle_{SI} = A / m \quad (3.3.28)$$

sau prin *vectorul polarizație magnetică*:

$$\vec{S} = \mu_0 \vec{M}. \quad (3.3.28')$$

care este analogul în magnetism al polarizației electrice $\vec{P}$. Momentul magnetic al substanței, ca și momentul electric, este o mărime *primitivă*.

Dacă un conductor prin care circulă un curent electric este situat mai întâi în vid, apoi într-un mediu oarecare, se observă că în cele două situații câmpurile magnetice din jurul conductorului nu sunt identice. Acest lucru se explică prin faptul că orice substanță are proprietăți magnetice, adică se magnetizează (se polarizează magnetic) sub acțiunea unui câmp magnetic.

Conform concepției lui Ampère, orice câmp magnetic, în ultimă instanță, este produs de curenți electrici (sarcini electrice în mișcare). Substanța magnetizată poate fi înlocuită, din punct de vedere magnetic, printr-o distribuție de curenți, convenabil aleasă, numiți *curenți amperici*, a căror densitate este:

$$\vec{j}_A = \nabla \times \vec{M}. \quad (3.3.29)$$

În vid, conform relațiilor (3.3.1) și (3.3.22):

$$\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \nabla \times \vec{B}_v = \mu_0 (\nabla \times \vec{H}) = \mu_0 \vec{j}$$

În prezența substanțelor magnetizate apare și un câmp magnetic produs de substanța magnetizată (de curenții amperici), pentru care putem scrie

$$\nabla \times \vec{B}_{\text{subst}} = \mu_0 \vec{j}_A$$

unde $\vec{j}_A$ este densitatea curenților amperici.

Câmpul magnetic total în aceste substanțe este suma a două câmpuri și are inducția

$$\vec{B} = \vec{B}_v + \vec{B}_{\text{subst}},$$

iar pentru $\vec{B}$ se scriu aceleași relații ca și pentru $\vec{B}_v$,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_A)$$

Înlocuind $\vec{j}_A$ dat de relația (3.3.29) se obține:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \nabla \times \vec{M}) \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}$$

și cum $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$, rezultă

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H},$$

și că în prezența substanțelor magnetizate,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \vec{S} \quad (3.3.30)$$

Pentru substanțele magnetice omogene și izotrope, între $\vec{H}$ în prezența substanței magnetizate și magnetizația $\vec{M}$, este valabilă relația de proporționalitate:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (3.3.31)$$

unde χ_m este *susceptivitatea magnetică a substanței*. Pentru polarizația magnetică se poate scrie relația:

$$\vec{S} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (3.3.32)$$

În funcție de valoarea lui χ_m , substanțele se împart în trei clase:

- I) *paramagnetice*, cu $\chi_m > 0$;
- II) *diamagnetice*, cu $\chi_m < 0$ și
- III) *feromagnetice*, cu $\chi_m \gg 1$.

Pentru primele două clase de substanțe se poate scrie :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (3.3.33)$$

unde $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ este permeabilitatea magnetică a mediului iar

$$1 + \chi_m = \mu_r \quad (3.3.34)$$

este permeabilitatea magnetică relativă.

A treia clasă de substanțe prezintă, sub o anumită temperatură, o magnetizare remanentă; ele se numesc *feromagnetice* și din această clasă fac parte Ni, Fe, Co și aliajele lor. Ele prezintă fenomenul de *histerezis magnetic*, adică de variație a magnetizării $\vec{M}$ în funcție de variația intensității câmpului magnetic $\vec{H}$. Peste o anumită temperatură, specifică fiecărei substanțe, numită *temperatură Curie*, magnetizarea remanentă dispăre.

3.4. CÂMPURI ELECTRICE ȘI MAGNETICE VARIABLE

3.4.1. Inducția electromagnetică

Deoarece un curent electric creează în jurul său un câmp magnetic, este firesc să se pună problema inversă: un câmp magnetic poate crea un curent electric. Răspunsul a fost dat în anul 1831 de Faraday care a descoperit că în orice circuit (contur conductor), odată cu variația fluxului inducției magnetice prin suprafața limitată de acest circuit, apare un curent electric. Acest fenomen se numește *inducție electromagnetică* iar curentul apărut, *curent indus*.

Pentru crearea unui curent într-un circuit este necesară prezența unei tensiuni electromotoare. Rezultă că fenomenul de inducție electromagnetică arată că prin variația fluxului magnetic Φ într-un contur, apare o *tensiune electromotoare de inducție*, $\mathcal{E}_i$.

Pentru a stabili legătura dintre $\mathcal{E}_i$ și viteza de variație a fluxului Φ se consideră un circuit simplu (fig. 3.4.1 a) ale cărui dimensiuni pot fi modificate.

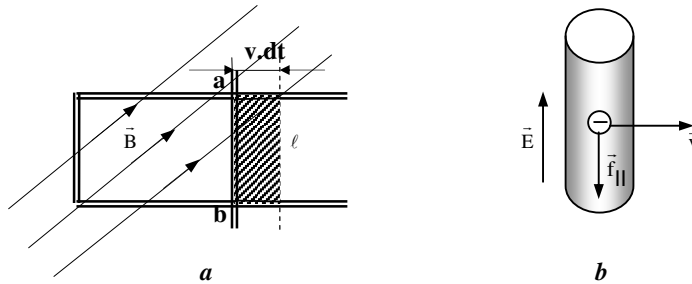


Fig. 3.4.1

Circuitul are două părți: o parte fixată având formă de U și o bară transversală mobilă (ab) de lungime ℓ , care poate aluneca de-a lungul celor două brațe ale părții în formă de U. Există totdeauna un circuit închis, dar aria sa este variabilă. Acest circuit este așezat într-un câmp magnetic omogen de inducție $\vec{B}$ normală la planul conturului. Dacă se deplasează latura (ab) cu viteza v , atunci cu aceeași viteză începe să se deplaseze - în raport cu câmpul $\vec{B}$ - și purtătorii de sarcină (electronii) din conductor (fig. 3.4.1 b).

Ca urmare, asupra fiecărui electron va acționa forța Lorentz (3.3.14), $\vec{f}_{II}$, care are modulul

$$f_{II} = e v B \quad (3.4.1)$$

indicele “II” arătând că forța este orientată de-a lungul conductorului.

Acțiunea forței (3.4.1) este echivalentă cu acțiunea unei forțe electrice determinate de câmpul electric de intensitate

$$E = v B$$

având direcția indicată în figura 3.4.1 b. Acest câmp este de origine neelectrostatică fiind un câmp *imprimat*; circulația sa pe contur dă mărimea tensiunii electromotoare induse în circuit:

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = v B \ell = B \frac{v \ell dt}{dt} = B \frac{dS}{dt},$$

unde $dS = \ell v dt$ este variația ariei conturului în timpul dt (porțiunea hașurată din fig. 3.4.1 a). În calculul circulației s-a avut în vedere că E este diferit de zero numai pe latura (ab) de lungime ℓ . Produsul $B \cdot dS$ este egal cu $d\Phi$, adică cu variația fluxului magnetic ce străbate conturul. Prin urmare, tensiunea electromotoare de inducție $\mathcal{E}_i$ ce apare într-un circuit închis, este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața limitată de circuit :

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.4.2)$$

unde semnul “-” indică sensul tensiunii electromotoare induse în funcție de sensul de variație a fluxului (*legea lui Lenz*). Formula (3.4.2) este cunoscută sub numele de **legea inducției electromagnetice a lui Faraday**.

Pe baza legii inducției electromagnetice (3.4.2) se poate defini unitatea de măsură a fluxului de inducție magnetică :

$$\langle \Phi \rangle_{SI} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ Weber (Wb)},$$

adică, *un weber este fluxul magnetic ce străbate suprafața unui circuit în care se induce o tensiune electromotoare de un volt, când acesta scade uniform la zero în timp de o secundă*. Cu ajutorul unității de flux magnetic se poate defini unitatea de măsură a inducției magnetice:

$$\langle B \rangle_{SI} = \frac{1 \text{ Wb}}{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ tesla (T)},$$

deci, *un tesla este inducția unui câmp magnetic uniform care produce un flux de 1Wb printr-o suprafață de 1 m², așezată perpendicular pe liniile de câmp*.

3.4.2. Energia câmpului magnetic

Se consideră o bobină de formă toroidală, formată din N spire și alimentată de o sursă care dă o tensiune electromotoare $\mathcal{E}$ (fig. 3.4.2). Când se închide circuitul, intensitatea curentului crește de la valoarea zero până la valoarea I corespunzătoare regimului staționar; totodată crește și intensitatea câmpului magnetic din interiorul bobinei. Se admite că cele N spire sunt suficient de dese astfel încât câmpul magnetic este concentrat în interiorul bobinei, în exterior fiind neglijabil.

Energia electrică absorbită de bobină sub formă de căldură în intervalul de timp dt este, conform (3.2.24),

$$dW = \mathcal{E} I dt \quad (3.4.3)$$

și pe seama acestei energii se formează câmpul magnetic elementar dH în interiorul bobinei.

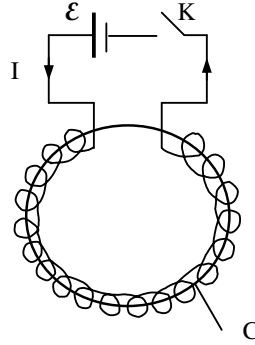


Fig. 3.4.2

În timpul variației câmpului magnetic de la zero la valoarea H , în bobină apare o tensiune electromotoare de inducție, care în fiecare moment echilibrează tensiunea $\mathcal{E}$. Pentru $\mathcal{E}_i$ se poate scrie relația

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d}{dt} (N \Phi_1) = \mathcal{E} , \quad (3.4.4)$$

unde Φ_1 este fluxul ce străbate o singură spirală.

Dacă se notează cu I valoarea instantanee a curentului, atunci câmpul magnetic la un moment dat se determină pe baza legii lui Ampère (3.3.20):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N I ,$$

de unde

$$I = \frac{H \ell}{N} \quad (3.4.5)$$

ℓ fiind lungimea conturului C (lungimea bobinei). Înlocuind (3.4.4) și (3.4.5) în (3.4.3) se obține

$$dW = N \frac{d\Phi_1}{dt} \frac{H \ell}{N} dt = \mu_0 S \ell H dH ,$$

sau, notând cu $\mathcal{V} = S \ell$ volumul din interiorul bobinei, în care este concentrat câmpul magnetic:

$$dW = \mu_0 \mathcal{V} H dH \quad (3.4.6)$$

Integrând energia de la 0 la W_m și câmpul magnetic de la 0 la H (mărima câmpului magnetic după stabilirea regimului staționar) se ajunge la relația:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathcal{V} , \quad (3.4.7)$$

pentru *energia câmpului magnetic* de unde, pentru densitatea de energie în volumul în care se găsește câmpul magnetic, se obține :

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (3.4.8)$$

Această expresie, $\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$, este interpretată ca *densitate de energie a câmpului magnetic*.

3.4.3. Curentul de deplasare

1. Necesitatea noțiunii de curent de deplasare

După cum s-a arătat în paragraful 3.2.1. pe baza datelor experimentale s-a admis ca o axiomă faptul că sarcina electrică se conservă. Ecuația de continuitate (3.2.7) care exprimă legea conservării sarcinilor electrice este:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4.9)$$

Această ecuație conduce la o dificultate în calculul câmpurilor magnetice datorate curenților variabili în timp. Teoria matematică a câmpurilor vectoriale arată că vectorul $\vec{B}$ este unic determinat prin ecuațiile (3.3.27) și (3.3.33):

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.4.10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \vec{j} \quad (3.4.11)$$

Însă, dacă densitatea de curent $\vec{j}$ satisface relația (3.4.11), ea trebuie să fie *solenoidală*, adică :

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (3.4.12)$$

și deci *liniile de curent* trebuie să fie *linii închise*. Această condiție este incompatibilă cu ecuația (3.4.9) pentru curenți nestaționari $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \right)$.

Paradoxul a fost rezolvat de Maxwell menținând condiția $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ și redefinind densitatea de curent astfel încât ea să fie *solenoidală* în toate cazurile. Acest lucru se realizează folosind legea lui Gauss generalizată (3.1.63),

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} \quad (3.4.13)$$

care afirmă că densitatea de sarcină liberă este o măsură a divergenței inducției electrice și deci ecuația de continuitate (3.4.9) se scrie :

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.4.14)$$

Prin urmare, în cazul curenților nestaționari, în legea lui Ampère (3.4.11) trebuie să se considere, în locul lui $\vec{j}$, curentul total de densitate $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, constituit din doi curenți: *curentul de conducție*

cu densitatea $\vec{j}$ și *curentul de deplasare* de densitate $\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, care **are rolul de a închide liniile de curenți variabili**, adică:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.4.15)$$

2. Sensul fizic al curentului de deplasare

Se consideră un condensator introdus în circuitul unui curent variabil (alternativ) (fig. 3.4.3). Evident, într-un astfel de circuit, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$. Relația de definiție (3.1.56) a vectorului inducție electrică este

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

sau, având în vedere ecuația (3.1.54),

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\vec{E}_o + \vec{E}_p) + \vec{P} \quad (3.4.16)$$

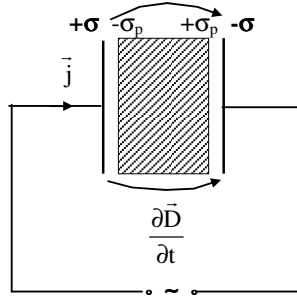


Fig. 3.4.3

Pentru valorile absolute ale mărimilor fizice, (3.4.16) devine

$$D = \epsilon_0 E_o - \epsilon_0 E_p + P \quad (3.4.17)$$

și densitatea curentului de deplasare se scrie :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_o}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.4.18)$$

Termenul $\partial P / \partial t$ reprezintă *densitatea curentului de polarizare* care se datorează deplasării sarcinilor electrice *legate*, în timpul variației polarizației dielectricului sub acțiunea câmpului electric variabil dintre plăcile condensatorului. Când se așează un dielectric într-un câmp electric variabil de frecvență înaltă, dipolii electrice ce compun dielectricul, rotindu-se după câmpul variabil, se ciocnesc cu atomii vecini și cedează o parte din energia lor; dielectricul se încălzește. Acest fenomen este folosit în tehnică pentru încălzirea unui dielectric, simultan pe toată grosimea lui. Deoarece mărimea $\partial P / \partial t$ reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor legate (și reale) din dielectric, acestea îi corespunde un câmp magnetic care apare în spațiul înconjurător și care se poate calcula după legea Biot-Savart-Laplace, ca și câmpul creat de curentul de conducție de densitate $\vec{j}$.

În absența dielectricului, când între plăcile condensatorului este vid:

$$P = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \quad E_p = 0; \quad \frac{\partial E_p}{\partial t} = 0 \quad (3.4.19)$$

și prin urmare, *densitatea curentului de deplasare în vid* este:

$$j_{dv} = \epsilon_0 \frac{\partial E_o}{\partial t} \quad (3.4.20)$$

Maxwell a presupus că acest curent de deplasare în vid nu este numai o noțiune formală, ci el creează în jurul său un câmp magnetic după aceleași legi ca și curenții de deplasare și de conducție. Numeroase experimente au confirmat această presupunere. S-a constatat că orice câmp

electric variabil $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0 \right)$ creează un câmp magnetic variabil, acesta fiind fenomenul de **inducție magnetoelectrică**.

3.4.4. Câmpul electrodinamic

În figura 3.4.4. a este reprezentat un flux magnetic variabil, care străbate aria limitată de un circuit închis C. De exemplu, la mărirea fluxului magnetic, în circuit apare o tensiune electromotoare indusă $\mathcal{E}_i$ și deci un câmp electric indus $\vec{E}$, care satisface relațiile :

$$\mathcal{E}_1 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.4.21)$$

Când conturul C este constituit dintr-un dielectric, atunci fiecare element din el se polarizează datorită câmpului electric indus $\vec{E}$. Dacă circuitul C este deschis atunci prin el nu circulă curent dar, ca rezultat al acțiunii câmpului indus $\vec{E}$, în circuit se produce o redistribuire a sarcinilor astfel încât la capetele conductorului apar sarcini libere.

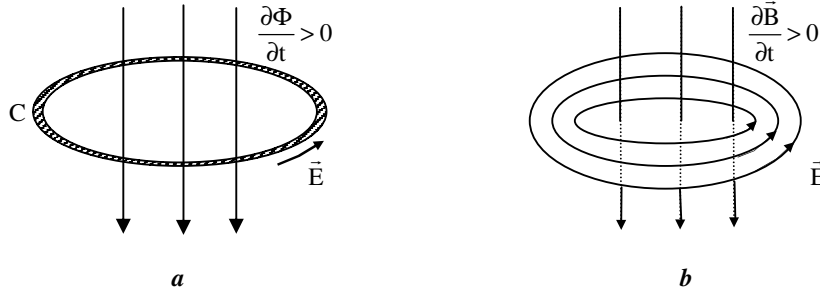


Fig. 3.4.4

Generalizând aceste rezultate, Maxwell a ajuns la concluzia că în toate punctele spațiului, unde există câmp magnetic variabil în timp apare un câmp electric, independent de faptul dacă există sau nu în ele un conductor. Conturul conductor este util doar pentru a observa câmpul electric indus care, spre deosebire de cel electrostatic, se numește *câmp electrodinamic*. Câmpul electrodinamic este *rotațional*, are liniile de câmp închise (fig. 3.4.4. b).

Într-adevăr, din relația (3.4.21) se obține

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.4.22)$$

sau, aplicând teorema lui Stokes :

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.4.23)$$

de unde

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.4.24)$$

Această relație reprezintă **forma locală a legii inducției electromagnetice** și exprimă *caracterul rotațional al câmpului electrodinamic*.

3.4.5. Câmpul electromagnetic. Ecuațiile lui Maxwell

După cum s-a arătat în § 3.4.3 rezultă că orice câmp electric variabil în timp, care are întotdeauna derivata în raport cu timpul variabilă, adică creează un curent de deplasare variabil, va genera un câmp magnetic de asemenea variabil în timp. Din § 3.4.4 rezultă că orice câmp magnetic variabil în timp determină apariția unui câmp electric variabil, cu linii de câmp închise.

Prin urmare, spațiul ocupat de un câmp electric variabil este în același timp sediul unui câmp magnetic variabil. Cele două câmpuri, electric și magnetic, sunt indisolubil legate între ele și formează o *unitate* numită **câmp electromagnetic**.

Din cele expuse până acum rezultă că starea câmpului electromagnetic este definită de următoarele perechi de mărimi vectoriale :

- *vectorul inducție electrică* $\vec{D}$, care măsoară latura electrică a câmpului prin sarcinile care produc câmpul ($\text{div } \vec{D} = \rho$) și *vectorul câmp magnetic* $\vec{H}$, care măsoară latura magnetică a câmpului prin curenții totali care produc câmpul $\left(\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$;

- *vectorul câmp electric* $\vec{E}$, care măsoară latura electrică a câmpului prin interacțiunile electrice pe care le produce ($\vec{f} = q \vec{E}$) și *vectorul inducție magnetică* $\vec{B}$, care măsoară latura magnetică a câmpului prin interacțiunile magnetice pe care le produce ($\vec{f} = q \vec{v} \times \vec{B}$).

În mediile *conductoare* mai apar mărimile: densitatea de curent $\vec{j}$ și intensitatea $\vec{E}_i$ a câmpului electric imprimat.

Aceste mărimi de stare sunt interdependente fiind legate între ele printr-un sistem complet de ecuații cu derivate parțiale, care determină starea electromagnetică locală în fiecare punct și care se numesc **ecuațiile lui Maxwell**. Pentru un mediu care nu este nici dielectric perfect, nici conductor perfect, deci pentru un mediu în care există atât curent de conducție cât și curent de deplasare, acest sistem este constituit din **ecuațiile locale** (3.4.15), (3.4.24), (3.1.63) și (3.3.23):

$$\text{- legea Maxwell-Ampère a circuitului magnetic: } \nabla \times \vec{H} \equiv \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.4.25)$$

$$\text{- legea lui Faraday a inducției electromagnetice: } \nabla \times \vec{E} \equiv \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.4.26)$$

$$\text{- legea lui Gauss pentru câmpul electric: } \nabla \cdot \vec{D} \equiv \text{div } \vec{D} = \rho \quad (3.4.27)$$

$$\text{- legea lui Gauss pentru câmpul magnetic: } \nabla \cdot \vec{B} \equiv \text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.4.28)$$

Formele integrale corespunzătoare acestor ecuații sunt, respectiv:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.4.29)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.4.30)$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (3.4.31)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.4.32)$$

Pentru determinarea câmpurilor electrice și magnetice, ecuațiile lui Maxwell se completează cu așa-numitele **relații de material** (3.1.56) și (3.3.30), impuse de polarizarea electrică și magnetică a corpurilor:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.4.33) \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{S} \quad (3.4.34)$$

sau în medii cu polarizare liniară - în care $\vec{P}$ și $\vec{S}$ sunt coliniari cu $\vec{E}$ (relația 3.1.60), respectiv cu $\vec{H}$ (relația 3.3.32) - și fără polarizare spontană,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.4.35) \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.4.36)$$

În plus, pentru medii conductoare se utilizează și **legea lui Ohm** (3.2.17):

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (3.4.37)$$

În încheiere, trebuie remarcat că liniaritatea ecuațiilor câmpului electromagnetic (3.4.25) – (3.4.28) implică valabilitatea principiului superpoziției câmpurilor electromagnetice, ceea ce generalizează principiul menționat în cazul câmpurilor electrostatic și magnetostatic (vezi paragrafele 3.1.2 și 3.3.1). Acest principiu se aplică în mod curent la efectuarea calculelor concrete.

3.4.6. Conservarea energiei câmpului electromagnetic

Se poate stabili legea conservării energiei privind propagarea câmpului electromagnetic, considerând că fluxul de energie electromagnetică se propagă cu viteză finită iar proprietățile electrice (ϵ , σ) și cele magnetice (μ) ale mediului nu depind de modulele vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$.

Considerăm un mediu liniar, omogen și izotrop pentru care putem scrie $\vec{H} = \vec{B} / \mu$ și $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ și transcriem sistemul de ecuații Maxwell (3.4.25) – (3.4.28) în funcție de $\vec{E}$ și $\vec{B}$:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0. \end{cases} \quad (3.4.38)$$

Înmulțim scalar prima ecuație cu $\vec{B}$, a doua ecuație cu $\vec{E}$ și scădem prima din a doua :

$$\vec{E}(\nabla \times \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \times \vec{E}) = \mu \vec{E} \vec{j} + \epsilon \mu \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}(\nabla \times \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \times \vec{E}) = \mu \vec{j} \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mu \vec{E}^2 + \vec{B}^2).$$

Conform relației (A.1.27) din Anexa 1,

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E}(\nabla \times \vec{B})$$

și relația precedentă, după împărțirea cu μ , se scrie

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) = \vec{j} \vec{E} + \nabla \cdot \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$$

În continuare se integrează această ecuație pe un domeniu de volum τ ,

$$-\frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) d\tau = \iiint_{\tau} \vec{j} \vec{E} d\tau + \iiint_{\tau} \nabla \cdot \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau \quad (3.4.39)$$

și se cercetează termenii din dreapta. Deoarece $d\tau = d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$ se obține:

$$\vec{j} d\tau = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{\ell} = dI \cdot d\vec{\ell},$$

unde $d\vec{\ell}$ este un element de linie orientat. Deci,

$$\iiint_{\tau} \vec{j} \vec{E} d\tau = \oint_S dI \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = I \cdot \mathcal{E} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

unde I este intensitatea curentului de conducție ce străbate suprafața S ce mărginește volumul τ ,

$\mathcal{E} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ este tensiunea electromotoare de-a lungul unei linii de curent Γ iar $dW = I \mathcal{E} dt$ este

căldura degajată în timpul dt prin efect Joule.

Notând:

$$\text{- energia câmpului electromagnetic - } W_{em} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) d\tau \quad (3.4.39 \text{ a})$$

$$\text{- densitatea de energie a câmpului - } w_{em} = \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) \quad (3.4.39 \text{ b})$$

$$\text{- vectorul Poynting-Umov - } \vec{Y} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.4.39 \text{ c})$$

ecuația (3.4.39) devine:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{Y} d\tau \quad (3.4.40)$$

Folosind teorema Green-Gauss-Ostrogradski, rezultă :

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{Y} d\tau = \oiint_S \vec{Y} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{Y} d\tau = \oiint_S \vec{Y} \cdot \vec{n} dS = \Phi$$

unde Φ este fluxul total al vectorului Poynting sau puterea care iese din suprafața S datorită propagării câmpului electromagnetic, având semnificația unui *curent de energie*. Astfel, (3.4.40) devine:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \Phi \quad (3.4.41)$$

ecuație ce exprimă **teorema conservării energiei câmpului electromagnetic sub formă integrală** : “scăderea energiei câmpului electromagnetic este egală cu suma dintre căldura dezvoltată prin efect Joule în unitatea de timp și fluxul de energie electromagnetică care străbate suprafața S ”.

Din (3.4.39) și (3.4.40), cu notațiile (3.4.39 a,b,c), se obține și **forma locală** a teoremei:

$$-\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{Y} \quad (3.4.42)$$

Dacă mediul este perfect izolator, $\vec{j} = 0$ și energia electromagnetică se poate transmite fără pierderi la distanțe foarte mari.

3.4.7. Unde electromagnetice

1. Noțiuni generale

Teorema conservării și transformării energiei câmpului electromagnetic pune în evidență, prin vectorul Poynting, un *transport de putere a câmpului electromagnetic* care are loc ca urmare a propagării câmpului.

Câmpul electromagnetic este univoc determinat de ecuațiile lui Maxwell, în orice moment și în orice punct din spațiu, dacă sunt cunoscute valorile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$ la momentul inițial ($t = 0$). Această afirmație capătă un sens fizic direct numai când se consideră o porțiune oarecare finită din spațiu și se completează condițiile care determină soluția ecuațiilor lui Maxwell cu anumite condiții de frontieră pe marginea acestor porțiuni. Dacă un asemenea câmp electromagnetic este creat într-o porțiune limitată a spațiului, el se propagă în restul spațiului cu o viteză finită, care în vid coincide cu viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Propagarea câmpului electromagnetic are un caracter de undă și pentru a arăta acest lucru se consideră cazul unui mediu omogen și fără distribuție volumică de sarcină adică :

- $\epsilon = \text{const.}, \mu = \text{const.}$ (mediu izotrop și omogen)
- $\rho = 0$ (mediu fără distribuție volumică de sarcină).

Ultima relație implică $\vec{j} = 0$ și ecuațiile lui Maxwell devin :

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; & \text{II. } \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ; \\ \text{III. } \nabla \cdot \vec{E} &= 0 ; & \text{IV. } \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

Aplicând operatorul rotor primei ecuații se obține

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

și folosind relația (A.1.35) și ecuația a II-a din sistemul (3.4.43), rezultă :

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

Primul termen este zero conform ecuației IV din sistemul (3.4.43), deci :

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4.44)$$

În mod analog, aplicând rotorul ecuației II a lui Maxwell și folosind ecuația III se obține :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4.45)$$

Dacă se compară aceste ecuații cu ecuația diferențială a undelor (2.2.26), rezultă pentru viteza de propagare a câmpului magnetic și a câmpului electric relația:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (3.4.46)$$

Astfel, din ecuațiile lui Maxwell rezultă că atât câmpul electric cât și câmpul magnetic nu sunt localizate în spațiu, ci se propagă sub forma unor unde, cu aceeași viteză ($1/\sqrt{\epsilon \mu}$). Cele două unde se propagă, așadar, simultan în spațiu, coexistă în fiecare punct din spațiu și reprezintă **unda electromagnetică**.

Pentru un mediu de permitivitate $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ și permeabilitate $\mu = \mu_r \mu_0$, viteza de fază a unei electromagnetice are valoarea :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (3.4.47)$$

Considerând numai expresia $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ pentru vid și ținând seama de valorile numerice ale lui μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) și ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m) se obține valoarea:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} , \quad (3.4.48)$$

care reprezintă valoarea vitezei luminii în vid și în acest caz, relația (3.4.47) se poate scrie :

$$v = c / \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (3.4.49)$$

Această relație poate fi scrisă și sub forma

$$c/v = n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (3.4.50)$$

întrucât raportul dintre viteza luminii în vid (c) și viteza de fază (v) a luminii prin mediul considerat reprezintă *indicele de refracție* (n) al mediului.

În cazul unui mediu *dielectric*, deoarece $\mu_r = 1$, relația (3.4.50) devine :

$$n^2 = \epsilon_r \quad (3.4.51)$$

2. Transversalitatea undelor electromagnetice

Una din soluțiile importante ale ecuației unei electromagnetice o constituie soluția sub formă de undă plană de tipul (2.2.47) și în acest caz, la orice moment, vectorii câmpului (sau funcția de undă) au aceeași valoare în toate punctele oricărui plan perpendicular pe direcția de propagare a undei. Dacă se alege axa Ox drept direcție de propagare, atunci $\vec{E}$ și $\vec{H}$ trebuie să depindă numai de variabilele x și t . Soluția sub formă de undă plană are forma (2.2.34):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - k x) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \sin(\omega t - k x) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.52)$$

unde k este numărul de undă, $\omega = k v$ iar $\vec{E}_0$ și $\vec{H}_0$ sunt amplitudinile vectorilor câmp electric și magnetic.

Sub formă complexă, aceste unde plane se scriu :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.53)$$

iar operatorul ∇ se reduce la expresia :

$$\nabla = \vec{I}_x \frac{\partial}{\partial x} = -(ik) \vec{I}_x \quad (3.4.54)$$

Dacă direcția de propagare nu este Ox , ci o direcție oarecare de versor $\vec{n}$, se înlocuiește $\vec{I}_x$ cu $\vec{n}$ și (3.4.54) devine :

$$\nabla = -(ik) \vec{n} \quad (3.4.55)$$

Pe baza acestei relații, ecuațiile III și IV ale lui Maxwell din (3.4.43) devin :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= -ik\mu\vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= -ik\varepsilon\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.56)$$

de unde rezultă că vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sunt perpendiculari pe $\vec{n}$, adică pe direcția de propagare a unei respectiv a vectorului de undă $\vec{k}$. Astfel, **undele electromagnetice plane sunt unde transversale**. Se poate arăta că și undele electromagnetice sferice sunt de asemenea transversale.

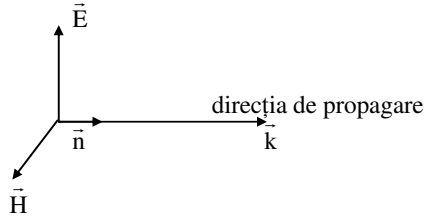


Fig. 3.4.5

O altă proprietate importantă a undelor electromagnetice este aceea că **vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sunt perpendiculari între ei** și deci, împreună cu $\vec{k}$, alcătuiesc un triedru drept (fig. 3.4.5). Rotind pe $\vec{E}$ spre $\vec{H}$ pe drumul cel mai scurt, sensul de înaintare a burghiului drept este spre $\vec{k}$.

Să demonstrăm afirmația anterioară; ținând cont de soluțiile sub formă de unde plane pentru $\vec{E}$ și $\vec{H}$, rezultă $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu \vec{H}_0 i \omega e^{i(\omega t - kx)} = \mu i \omega \vec{H}$

$$\text{și analog} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon i \omega \vec{E} \quad (3.4.57)$$

Ecuațiile I și II din (3.4.43) devin în acest caz:

$$-ik\vec{n} \times \vec{H} = \varepsilon i \omega \vec{E} \quad \text{și} \quad -ik\vec{n} \times \vec{E} = -\mu i \omega \vec{H} \quad (3.4.58)$$

dar cum $\omega = k v$, rezultă:

$$-(\vec{n} \times \vec{H}) = \varepsilon v \vec{E} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \quad (3.4.59)$$

$$\text{și} \quad \vec{n} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}, \text{ adică : } \sqrt{\mu} \vec{H} = \sqrt{\varepsilon} (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (3.4.60)$$

Din ultima relație rezultă clar că $\vec{H}$ este perpendicular pe planul determinat de $\vec{n}$ și $\vec{E}$, adică $\vec{H} \perp \vec{E}$. În plus rezultă $\sqrt{\mu} \vec{H} = \sqrt{\varepsilon} \vec{E}$ și deci :

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (3.4.61)$$

deoarece $|\vec{n} \times \vec{E}| = 1 \cdot E \sin 90^\circ = E$. Astfel raportul mărimilor vectorilor nu depinde de timp și deci acești vectori **au aceeași fază și variază sincron**; $\vec{E}$ și $\vec{H}$ concomitent și în aceleași puncte din spațiu ating valorile maxime și respectiv minime, *oscilând în fază*. Raportul E / H are dimensiunea unei rezistențe electrice (ohm) și se numește *impedanța undei plane*, depinzând de natura mediului în care se propagă unda.

Densitatea de energie (3.4.39 b) este în cazul undei electromagnetice plane

$$w = \frac{1}{2}(\mu H^2 + \epsilon E^2) = \mu H^2$$

și intensitatea undei electromagnetice este, conform relației (2.2.58) :

$$I = w \cdot v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \mu H^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H^2 = E \cdot H = |\vec{E} \times \vec{H}| = |\vec{Y}|$$

deci egală cu mărimea vectorului Poynting (3.4.39 c) care are sensul direcției de propagare.

Dacă presupunem că planul de oscilație a vectorului $\vec{E}$ este xOy și al lui $\vec{H}$ este xOz, unda electromagnetică se numește *polarizată*. Cu aceste rezultate, unda electromagnetică poate fi reprezentată grafic ca în figura 3.4.6.

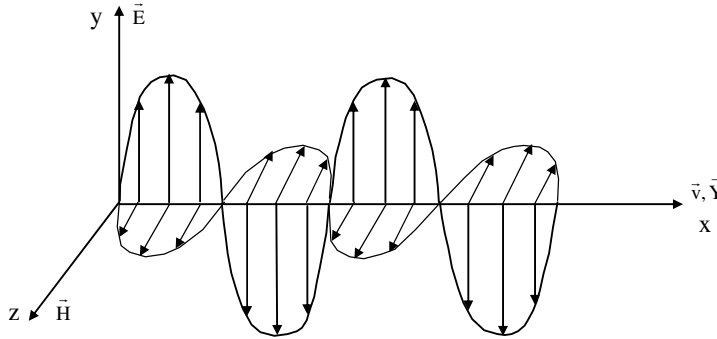


Fig. 3.4.6

PROBLEME PROPUSE LA CAPITOLUL 3

3.1. Un conductor de lungime 2ℓ este uniform încărcat având densitatea liniară de sarcină λ . Să se calculeze câmpul electric $\vec{E}$ într-un punct de pe perpendiculara dusă pe mijlocul conductorului, situat la distanța a de conductor.

$$\mathbf{R:} \quad E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \sin\left(\arctg \frac{\ell}{a}\right)$$

3.2. Un inel subțire de rază r este încărcat uniform cu sarcina q . Calculați câmpul electric E pe axa inelului la distanța d de centrul acestuia. Ce devine expresia obținută pentru $d \gg r$? Care este valoarea maximă a lui E și care este punctul în care aceasta poate fi atinsă?

$$\mathbf{R:} \quad E = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}}; \quad E_{\max} = \pm \frac{q\sqrt{3}}{18\pi\epsilon_0 r^2}$$

3.8. Să se determine câmpul electric creat de două plane infinite încărcate cu densitățile superficiale de sarcină $+3\sigma$ și $-\sigma$.

$$\mathbf{R:} \quad E_{\text{int}} = E_+ + E_- = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}; \quad E_{\text{ext}} = E_+ - E_- = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

3.10. Un condensator cilindric are ca armături doi cilindri coaxiali cu razele R_1 , R_2 și înălțimea ℓ (fig. 3.10 a). Dielectricul dintre armături are permitivitatea ϵ . Să se calculeze capacitatea condensatorului.

$$\mathbf{R:} \quad C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3.11. Un condensator sferic are ca armături două sfere concentrice cu razele R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$). Dielectricul are permitivitate ϵ . Să se calculeze capacitatea condensatorului.

$$\mathbf{R:} \quad C = \frac{q}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon}} = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

3.13. Să se demonstreze că un câmp electrostatic omogen $\vec{E}_0$ admite potențialul scalar $V(r) = -\vec{E}_0 \vec{r} + C$, unde C este o constantă.

3.14. Un dipol cu momentul electric $\vec{p}$ este localizat la distanța r de un fir lung încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină λ . Determinați forța care acționează asupra dipolului dacă $\vec{p}$ este orientat: a) paralel cu firul; b) paralel cu raza vectoare $\vec{r}$.

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } F_r = 0; \quad \text{b) } F = -p \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

3.15. Un mediu omogen slab conductor, de rezistivitate ρ umple spațiul dintre doi cilindri coaxiali cu razele a și b ($a < b$), având fiecare lungimea ℓ . Calculați rezistența mediului dintre cilindri, neglijând efectele de margine.

$$\mathbf{R:} \quad R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

3.20. Să se determine câmpul magnetic creat de o distribuție de curent cu densitate constantă j , de forma unei păhuri cilindrice de raze R_i și R_e , la o distanță r : a) $r < R_i$; b) $r \in (R_i, R_e)$; c) $r > R_e$.

$$\mathbf{R:} \quad H_i(r) = 0; \quad H_{ie}(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}; \quad H_e(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

3.25. O particulă încărcată electric trece nedeviată prin două câmpuri, unul electric și unul magnetic, aplicate simultan. Dacă încetează acțiunea câmpului electric particula descrie o traiectorie de rază r . Dacă ar înceta doar acțiunea câmpului magnetic, particula ar căpăta accelerația a . Determinați viteza particulei.

$$\mathbf{R:} \quad v = \sqrt{a \cdot r}$$

3.27. Care este intensitatea câmpului electric și magnetic al unei unde a cărei intensitate energetică este în vid $I = 10 \text{ W/m}^2$?

$$\mathbf{R:} \quad E = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_0 \cdot c}} = 194 \frac{\text{V}}{\text{m}}; \quad H = \sqrt{\frac{I}{\mu_0 \cdot c}} = 0,515 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

3.32. O undă electromagnetică armonică plană este descrisă de vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ dați de ecuațiile: $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y, z) e^{i\omega t}$; $\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0(x, y, z) e^{i\omega t}$. Unda se propagă în interiorul unei cavități rezonante vidate de forma unui paralelipiped cu laturile a, b, c , având pereții perfect conductori. Să se arate că: $\Delta \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0$ și $\Delta \vec{H}_0 + k^2 \vec{H}_0 = 0$.

ANEXA A.1. ELEMENTE DE ANALIZĂ VECTORIALĂ

A.1.1. Diferențiale totale exacte

Diferențiala unei funcții continue de două variabile $F = F(x, y)$ va fi tot o funcție de x și y și poate fi pusă sub forma:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_x dy \quad (\text{A.1.1}) \quad \text{sau} \quad dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad (\text{A.1.2})$$

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_y \quad (\text{A.1.3}) \quad N = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_x \quad (\text{A.1.4}) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad \text{și} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.1.5}) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_y \quad (\text{A.1.6})$$

Dacă funcția F studiată depinde de trei variabile x, y, z diferențiala ei este totală exactă dacă:

$$dF(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{x,y} dz = M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz \quad (\text{A.1.7})$$

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{y,z}; \quad N = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x,z}; \quad P = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{x,y} \quad (\text{A.1.8}) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad (\text{A.1.9})$$

Formula lui Taylor pentru o funcție de o variabilă, $f: [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de $(n+1)$ ori derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$ este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \quad (\text{A.1.10}) \quad \text{unde} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

A.1.2. Operatori vectoriali diferențiali de ordinul întâi în coordonate carteziene

1) Gradientul. Fie funcția scalară $\varphi(x, y, z)$ de clasă C^1 , definită pe un anumit domeniu D din $\mathbf{R}_3$. Din definiția dată mai sus (vezi

§ A.1.3.), rezultă că în D avem un câmp scalar staționar. Observăm că diferențiala $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ poate fi considerată ca

$$\text{produsul scalar al vectorilor} \quad d\vec{r} = dx \cdot \vec{i}_x + dy \cdot \vec{i}_y + dz \cdot \vec{i}_z \quad \text{și} \quad \vec{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{i}_z.$$

Câmpul vectorial $\vec{A}$ se numește **gradientul funcției scalare φ** și se notează **grad φ** . Putem scrie atunci

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.1.11})$$

Se constată că vectorul $\vec{A} = \text{grad } \varphi$ s-a obținut prin aplicarea operatorului

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{i}_z \quad (\text{A.1.12})$$

funcției scalare $\varphi(x, y, z)$. Acest operator, notat cu simbolul ∇ , se numește operatorul *nabla* (după numele unei harfe asiriene de formă triunghiulară), sau *operatorul lui Hamilton*. Prin urmare

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{i}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{i}_z \quad (\text{A.1.13})$$

deci gradientul unei funcții scalare este un vector cu componentele egale cu derivatele parțiale ale scalarului în raport cu coordonatele.

Câmpul vectorial $\vec{A}$ care se poate reprezenta ca gradientul unei funcții scalare φ , $\vec{A} = \text{grad } \varphi(x, y, z)$, se numește **câmp conservativ**.

Suprafețe echipotențiale. Fie suprafața fixă $\varphi(x, y, z) = C$ (const.). (A.1.14)

Din (A.1.11) deducem atunci $\nabla \varphi \cdot d\vec{r} = 0$ și cum $d\vec{r}$ se găsește în planul tangent la suprafața (A.1.14), rezultă că în orice punct al acestei suprafețe, vectorul $\nabla \varphi$ are direcția normalei la suprafață. Dând valori constantei C din (A.1.14), obținem o familie de suprafețe numite *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel*. Altfel spus, dat fiind un câmp scalar $\varphi(x, y, z)$, locul geometric al punctelor care au proprietatea $\nabla \varphi \cdot d\vec{r} = 0$ este o suprafață numită echipotențială.

2) Divergența. Având în vedere caracterul vectorial al operatorului ∇ , să-l aplicăm scalar câmpului vectorial $\vec{A}$ de componente A_x, A_y și A_z . Rezultatul acestei operații se numește **divergența lui $\vec{A}$** , se notează **div. $\vec{A}$** și este un scalar sau un pseudoscalar, după cum $\vec{A}$ este polar sau axial. Expresia analitică a divergenței este

$$\text{div. } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{i}_z \right) (A_x \vec{i}_x + A_y \vec{i}_y + A_z \vec{i}_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.1.15})$$

deci divergența unui vector este suma derivatelor parțiale ale componentelor vectorului în raport cu coordonatele respective.

$$\text{Un câmp vectorial care are proprietatea} \quad \text{div. } \vec{A} = 0 \quad (\text{A.1.16})$$

se numește *câmp fără surse* sau *câmp solenoidal*. Liniile unui astfel de câmp sunt *curbe închise*.

3) Rotorul. Prin **rotor al unui câmp vectorial $\vec{A}$** înțelegem un câmp vectorial $\vec{B}$, obținut din $\vec{A}$ prin operația :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} \quad (\text{A.1.17})$$

și, ca orice produs vectorial, se scrie sub forma unui determinant,

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.1.17'})$$

componentele acestuia având semnificația unor “derivate transversale”, componenta pe x a rotorului vectorului $\vec{A}$ depinzând de variația lui A_z pe direcția lui y și de variația negativă a lui A_y pe direcția lui z ș.a.m.d.

Un câmp vectorial $\vec{A}$ care are proprietatea

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad (\text{peste tot}) \quad (\text{A.1.18})$$

se numește *câmp irotațional* sau *fără vârtejuri* sau, încă, *neturbionar*. Condiția (A.1.18) este o condiție suficientă ca un câmp să fie conservativ, adică să poată fi descris de gradientul unei funcții potențiale oarecare.

4) Teorema Green-Gauss-Ostrogradski

Fie S o suprafață mărginită și $\vec{A}$ un vector cu punctul de aplicație pe S. Fluxul vectorului $\vec{A}$ prin suprafața S este:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.1.19})$$

unde $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ este un element orientat al lui S. Dacă suprafața S este *închisă* și $\vec{n}$ este versorul *normalei exterioare*, al cărei sens este ales ca pozitiv, se demonstrează că

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{A} d\tau \quad (\text{A.1.20})$$

unde $d\tau$ este un element al volumului V, ocupat de domeniul D limitat de suprafața S. Formula (A.1.20) exprimă **teorema Green-Gauss-Ostrogradski**: fluxul vectorului $\vec{A}$ prin suprafața închisă S este egal cu integrala pe domeniul D, de volum V, limitat de suprafața S, din divergența vectorului $\vec{A}$. Dacă fluxul vectorului $\vec{A}$ printr-o suprafață închisă este nul, se spune că *fluxul vectorului este conservativ* și că $\vec{A}$ este un vector de flux conservativ. Prin contractarea suprafeței S, la limită se obține din (A.1.20) :

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.1.21})$$

care poate fi considerată ca relația de definiție a divergenței într-un punct. Dacă $\text{div } \vec{A} > 0$, spunem că în acel punct avem o *sursă pozitivă* (*izvor*), iar dacă $\text{div } \vec{A} < 0$, în punctul respectiv există o *sursă negativă* (*puț*).

5) Teorema Stokes-Ampère

Fie din nou o suprafață S, de data aceasta *deschisă*, care se sprijină pe conturul Γ . Dacă $\vec{A}$ este un vector cu punctul de aplicație pe Γ , integrala curbilinie $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ este circulația lui $\vec{A}$ de-a lungul conturului Γ . Pentru a exprima circulația, trebuie ales pe Γ un sens de parcurs, adoptat ca pozitiv (fig. A.1.4). În acest caz, sensul pozitiv al versorului $\vec{n}$ al normalei la S va fi dat de regula burghiului. Se poate arăta că

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.1.22})$$

unde $d\vec{S}$ este un element orientat al lui S. Relația (A.1.22) este cunoscută sub numele de **teorema Stokes-Ampère**: circulația vectorului $\vec{A}$ de-a lungul conturului închis Γ este egală cu fluxul rotorului vectorului $\vec{A}$ prin suprafața S ce se sprijină pe contur.

$$\text{Dacă } \vec{A} \text{ este un câmp conservativ } \vec{A} = \text{grad } \phi(x, y, z), \text{ avem: } \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \oint_{\Gamma} d\phi = 0 \quad (\text{A.1.23})$$

căci circulația dintr-o diferențială totală, pe un contur închis, este nulă.

A.1.3. Formule utile

$$1^\circ. \text{ grad}(\phi\psi) = \nabla(\phi\psi) = \psi \nabla\phi + \phi \nabla\psi = \psi \text{grad } \phi + \phi \text{grad } \psi \quad (\text{A.1.24})$$

$$2^\circ. \text{ div}(\phi \vec{A}) = \nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi = \phi \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } \phi \quad (\text{A.1.25})$$

$$3^\circ. \text{ rot}(\phi \vec{A}) = \nabla \times (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \times \vec{A} + (\nabla \phi) \times \vec{A} = \phi \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } \phi) \times \vec{A} \quad (\text{A.1.26})$$

$$4^\circ. \text{ div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \quad (\text{A.1.27})$$

$$5^\circ. \text{ grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} \quad (\text{A.1.28})$$

$$6^\circ. \text{ rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot \text{div } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (\text{A.1.29})$$

$$7^\circ. \text{ div}(\text{rot } \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.1.30}) \quad \text{rot}(\text{grad } \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.1.31})$$

$$8^\circ. \text{ div}(\text{grad } \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi \quad (\text{A.1.32})$$

$$\text{laplaceanul } \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.1.33}) \quad \text{ecuația lui Laplace } \Delta \phi = 0 \quad (\text{A.1.34})$$

$$9^\circ. \text{ rot}(\text{rot } \vec{A}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{A.1.35})$$

10°. Dacă $\vec{r}(x, y, z)$ este vectorul de poziție al unui punct P în raport cu originea reperului Oxyz, avem :

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_r; \quad |\text{grad } r| = 1; \quad \text{div } \vec{r} = 3; \quad \text{rot } \vec{r} = 0; \quad \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (r \neq 0) \quad (\text{A.1.36})$$

$$11^\circ. \text{ grad } \phi(r) = \frac{\vec{r}}{r} \phi'; \quad \text{div } \vec{A}(r) = \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{A}'; \quad \text{rot } \vec{A}(r) = \frac{1}{r} \vec{r} \times \vec{A}' \quad (\text{A.1.37})$$

12°. Laplaceanul în coordonate sferice:

$$\Delta(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{A.1.38})$$

TESTE GRILĂ FIZICĂ - CAPITOLUL I

1 – Vectorul viteză momentană:

- A. coincide cu vectorul viteză medie în mișcarea curbilinie;
- B. este tangent la traiectorie în fiecare punct al său;
- C. este perpendicular pe accelerația tangențială;
- D. este secant la traiectorie în fiecare punct al său;
- E. este nul în mișcarea rectilinie uniformă.

2 – Principiul inerției afirmă că dacă $F=0$:

- A. punctul material își menține starea de mișcare uniform accelerată sau de repaus;
- B. punctul material își menține starea de mișcare uniform accelerată;
- C. punctul material își menține starea de repaus;
- D. punctul material își menține starea de mișcare.
- E. punctul material își menține starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus;

3 – Conform principiului acțiunii și reacțiunii:

- A. dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță numită acțiune, cel de al doilea acționează asupra primului cu o forță dublă, numită reacțiune;
- B. dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță numită acțiune, cel de al doilea acționează asupra primului cu o forță numită reacțiune, egală în modul și în sens contrar;
- C. dacă un corp stă în repaus forțele de acțiune și reacțiune nu acționează asupra lui;
- D. forța de acțiune este jumătate din forța de reacțiune;
- E. dacă forța de acțiune este verticală, forța de reacțiune este orizontală.

4 – Produsul vectorial a doi vectori reprezintă:

- A. un vector perpendicular pe planul celor doi vectori;
- B. un vector paralel cu planul celor doi vectori;
- C. o mărime scalară;
- D. totdeauna o mărime adimensională;
- E. totdeauna o mărime de stare.

5 – Impulsul unui corp cu masa m și care se mișcă cu viteza v se definește ca:

- A. produsul scalar dintre masa și accelerația corpului;
- B. viteza de variație a forței care acționează asupra corpului;
- C. o mărime vectorială a cărei modul este produsul dintre masa și viteza corpului;
- D. viteza de variație a energiei totale a corpului;
- E. produsul vectorial dintre masa și viteza corpului.

6 – Lucrul mecanic este:

- A. o mărime vectorială deoarece este produsul între o mărime vectorială (forța) și o mărime scalară (deplasarea);
- B. o mărime vectorială deoarece este produsul între o mărime vectorială (deplasarea) și o mărime scalară (forța);

- C. o mărime vectorială deoarece este rezultatul unui produs vectorial dintre două mărimi vectoriale (forța și deplasarea);
- D. o mărime scalară deoarece este rezultatul unui produs scalar între două mărimi vectoriale (forța și deplasarea);
- E. o mărime scalară deoarece este rezultatul unui produs între două mărimi scalare (forța și deplasarea).

7 – Prin definiție lucrul mecanic este egal cu produsul dintre mărimea forței și mărimea deplasării ($L=F \cdot d$) dacă:

- A. forța este constantă și punctul ei de aplicație se deplasează pe distanța d pe o direcție oarecare;
- B. forța este constantă și punctul ei de aplicație se deplasează pe distanța d , în direcție normală la direcția forței;
- C. forța este constantă și punctul ei de aplicație se deplasează pe distanța d , în direcția și în sensul forței;
- D. forța este constantă și punctul ei de aplicație se deplasează pe distanța d în sens contrar forței;
- E. forța este variabilă și punctul ei de aplicație se deplasează pe distanța d în direcția și sensul forței.

8 – Energia cinetică a unui corp este:

- A. invers proporțională cu viteza corpului;
- B. invers proporțională cu masa corpului;
- C. direct proporțională cu masa corpului și cu viteza;
- D. invers proporțională cu masa corpului și cu pătratul vitezei corpului;
- E. direct proporțională cu masa corpului și cu pătratul vitezei corpului.

9 – Energia cinetică a unui camion cu masa de 12 t care se deplasează cu viteza de 36 km/h este:

- A. 240 kJ; B. 360 kJ; C. 60 kJ; D. 600 kJ; E. 300 kJ.

10 – Puterea mecanică dezvoltată de o forță constantă ca direcție, sens și intensitate reprezintă:

- A. raportul dintre lucrul mecanic efectuat de această forță și deplasarea produsă;
- B. raportul dintre lucrul mecanic efectuat de această forță și intervalul de timp necesar efectuării lui;
- C. raportul dintre lucrul mecanic efectuat de această forță și viteza imprimată;
- D. raportul dintre lucrul mecanic efectuat de această forță și accelerația imprimată;
- E. raportul dintre lucrul mecanic efectuat de această forță și masa corpului asupra căruia acționează forța.

11 – Un corp cu masa de 4 kg are energia cinetică de 50 J. Datorită unei forțe de rezistență la înaintare, impulsul corpului scade cu 16 N.s. Impulsul final al corpului este:

- A. 3 N.s; B. 4 N.s; C. 8 N.s; D. 5 N.s; E. 10 N.s.

12 – Un câmp de forțe este conservativ dacă:

- A. energia potențială este constantă de-a lungul liniilor de câmp;
- B. lucrul mecanic nu depinde de stările inițială și finală;
- C. lucrul mecanic nu depinde de drum ci doar de stările inițială și finală;

- D. forțele nu sunt funcții de punct;
E. energia totală nu se conservă.
- 13** – Într-un câmp conservativ de forțe variația energiei potențiale între două stări este:
A. egală cu variația energiei cinetice între acele stări;
B. egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor conservative;
C. egală cu variația energiei cinetice plus variația lucrului mecanic între acele stări;
D. proporțională cu variația de viteză;
E. totdeauna mai mare ca variația energiei cinetice.
- 14** – Lucrul mecanic al greutatei este:
A. independent de drumul parcurs de punctul material și dependent de legea de mișcare a acestuia;
B. dependent de drumul parcurs de punctul material și independent de legea de mișcare a acestuia;
C. dependent de drumul parcurs de punctul material și de legea de mișcare a acestuia;
D. este egal cu produsul greutății prin diferența de nivel h dintre pozițiile inițială și cea finală a punctului material;
E. nici un răspuns nu este corect.
- 15** – Un corp este lăsat să cadă liber de la înălțimea $h = 180$ m. În momentul când atinge Pământul are impulsul $p = 30$ Ns. Energia cinetică a corpului în acest moment este:
A. 800 J; B. 900 J; C. 450 J; D. 990 J; E. 9 KJ.
- 16** – Lucrul mecanic efectuat de o forță disipativă care acționează asupra unui corp situat într-un câmp conservativ de forțe este egal:
A. și de semn opus cu variația energiei cinetice a sistemului;
B. și de semn opus cu variația energiei potențiale a sistemului;
C. cu variația energiei mecanice a sistemului;
D. cu suma între energia cinetică și potențială a sistemului;
E. cu lucrul mecanic efectuat de forțele conservative.
- 17** – Care este modulul momentului cinetic față de un punct O al unui punct material de masă m , viteză v , situat la distanța r față de O (α este unghiul dintre vectorul de poziție și vectorul impuls)?
A. $r \cdot mv \cdot \sin\alpha$; B. $r \cdot mv \cdot \cos\alpha$; C. $r \cdot v \cdot \sin\alpha$;
D. $r \cdot v \cdot \cos\alpha$; E. nici un răspuns nu e corect.
- 18** – Teorema variației momentului cinetic se enunță astfel:
A. variația momentului cinetic în raport cu un punct fix este egală cu momentul forței care produce mișcarea în raport cu acel punct;
B. viteza de variație a momentului cinetic în raport cu un punct fix este egală cu momentul forței care produce mișcarea în raport cu acel punct;
C. variația momentului cinetic în raport cu un punct fix este egală cu momentul forței care produce mișcarea în raport cu acel punct, luat cu semn schimbat;
D. momentul cinetic în raport cu un punct fix se conservă într-un câmp conservativ;
E. momentul cinetic în raport cu un punct fix este nul într-un câmp conservativ.

19 – Energia relativistă a unei particule cu masa de repaus m_0 și viteză v , corespunzătoare masei de mișcare m , este:

A. $mv^2/2$; B. $m_0 v^2/2$; C. $m_0 c^2$; D. $m_0 c^2/2$; E. mc^2 .

20 – Determinați viteza unei particule relativiste dacă energia cinetică a particulei este egală cu energia sa de repaus.

A. $2,6 \cdot 10^8$ m/s; B. $3 \cdot 10^7$ m/s; C. $2,6 \cdot 10^7$ m/s; D. $1,5 \cdot 10^8$ m/s;
E. $1,5 \cdot 10^7$ m/s.

Răspunsuri corecte:

1- B

2- E

3- B

4- A

5- C

6- D

7- C

8- E

9- D

10- B

11- B

12- C

13- B

14- D

15- B

16- C

17- A

18- B

19- E

20- A